Математические заметки

Том 104 выпуск 3 сентябрь 2018

УДК 517.957+517.984.2

О ядерности операторов Ганкеля, возникающих в теории уравнения Кортевега–де Фриза

С. М. Грудский, А. В. Рыбкин

Мы изучаем свойство принадлежности оператора Ганкеля (и его производных по параметру) с сильно осциллирующим символом классу ядерных операторов. Наш подход базируется на критерии Пеллера о ядерности операторов Ханкеля и точном анализе, возникающего при этом тройного интеграла с помощью метода перевала. Полученные результаты представляются оптимальными. Мы применяем их к изучению проблемы Коши для уравнения Кортевега–де Фриза. Именно, устанавливается связь гладкости решения со скоростью убывания начальных данных на плюс-бесконечности.

Библиография: 30 названий.

Ключевые слова: оператор Ганкеля, ядерный оператор, уравнение Кортевега–де Фриза, метод обратной задачи.

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm12112

1. Введение. В настоящей статье мы продолжаем изучать и применять операторы Ганкеля, возникающие в методе обратной задачи рассеяния для интегрируемых систем. Статья [1] является первой работой в нашем цикле, где явно прослеживается связь между теорией операторов Ганкеля и методом обратной задачи для уравнения Кортвега–де Фриза (КдФ). Это важное уравнение приведено и обсуждено в п. 7. Отметим, что в интегральной форме операторы Ганкеля естественно возникали уже в классических работах Л. Фадеева и В. Марченко по решению одномерной обратной задачи квантовой теории рассеяния (смотри, например, хорошо известную книгу Марченко [2]). Однако, хорошо разработанная теория этого класса операторов (и даже само название) тогда не использовалась. Формулировка теории рассеяния Фадеева–Марченко в терминах операторов Ганкеля и применения арсенала средств этой теории возникла уже в нашем веке в глубокой работе А. Вольберга и П. Юдицкого [3] и продолжилась в цикле работ Юдицкого с различными соавторами (см. [4] как наиболее относящуюся к нашей). На самом деле, в этих работах обратная задача рассеяния изучалась только для операторов Якоби, а не для Шрёдингера и не в контексте интегрируемых систем. Постановка обратной задачи для оператора Шредингера в терминах операторов Ганкеля и ее приложений

Работа первого автора выполнена при поддержке гранта CONACYT 238630.

к задаче Коши для КдФ было впервые дано в завершенной форме в нашей работе [5], где глубокие утверждении из теории ганкелевых операторов были использованы для ответа на многие открытые проблемы, связанные с КдФ. Недавняя работа [6] улучшает результаты [5] и мотивирована важными вопросами В. Е. Захарова, сформулированными в [7], [8]. В настоящей работе мы концентрируемся на вопросе о ядерности оператора Ганкеля, возникающего в методе обратной задачи рассеяния для КдФ и его производных по параметрам, существенно улучшая при этом результаты работы [6]. Проблема в существенном сводится к ядерности оператора Ганкеля (и его производных по x, t) вида

$$\mathbb{H}(\varphi_x) := JP^{-}\varphi_x P^{+} : H^2(\Pi) \to H^2(\Pi), \tag{1.1}$$ {eq1.

где $H^2(\Pi)$ представляет собой пространство Харди в верхней полуплоскости

$$\Pi := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}\lambda > 0\};$$

J – оператор отражения:

$$(Jf)(\lambda) = f(-\lambda), \qquad \lambda \in \mathbb{R};$$

$P^{\pm}$ есть аналитические проекторы, задаваемые согласно формулам

$$\begin{aligned} &(P^{+}f)(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\tau)}{\tau - \xi}\,d\tau, \qquad \xi \in \overline{\Pi}, \\ &(P^{-}\varphi)(\xi) = (JP^{+}J\varphi)(\xi), \end{aligned}$$

действующие в пространстве $L_2(\mathbb{R})$.

Отметим, что если ξ принадлежит вещественной оси $\mathbb{R}$, то написанный интеграл понимается как предельное значение почти всюду по некасательным направлениям из верхней полуплоскости Π.

Функция φ_x называется *символом оператора Ганкеля.* В настоящей работе мы предполагаем, что φ_x есть ограниченная функция класса $L_\infty(\mathbb{R})$, представленная в виде

$$\varphi_x(\lambda) = T(\lambda)G_{-}(\lambda)e^{i\Phi(\lambda,x)}. \tag{1.2}$$ {eq1.

Здесь

$$\Phi(\lambda, x) = 8t\lambda^3 + 2x\lambda, \qquad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{1.3}$$ {eq1.

Функция $G_{-}(\lambda)$ допускает представление в виде интеграла Фурье по полуоси

$$G_{-}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-2i\lambda s} g(s)\,ds, \tag{1.4}$$ {eq1.

где неотрицательнозначная почти всюду функция $g(s) \in L_1(\mathbb{R}_+, (1+s)^\alpha)$, т.е.

$$\int_0^\infty g(s)(1+s)^\alpha ds < \infty, \qquad \alpha \geqslant 0. \tag{1.5}$$ {eq1.

Отметим, что функция $G_{-}(\lambda)$ аналитична и ограничена в нижней полуплоскости, что подчеркивает знак “$-$” в ее обозначении.

Наконец, $T(\lambda)$ принадлежит $H^\infty(\Pi)$ – пространству Харди аналитических, ограниченных в верхней полуплоскости функций.

Основное своеобразие рассматриваемого оператора – в присутствии быстро осциллирующей экспоненты в его символе (1.2). Обсуждение нетривиальности этого вопроса возникло еще в нашей работе [1]. Но в предыдущих статьях мы вынуждены были решать его путем либо (см. [5], [9]) наложения значительно более быстрого чем (1.5) убывания функции $g(s)$, либо (см. [6]) путем довольно сложного и неестественного обхода этого вопроса, основанного на использовании результатов [10] (полученных совершенно другой и довольно трудоемкой техникой).

Основным результатом работы является теорема 2.1, где мы доказываем не только ядерность оператора Ганкеля с символом (1.2) при предположении, что в (1.5) степень $\alpha = 0$, но и связь его дифференцируемости по x с показателем α. Это позволяет нам немедленно получить в теореме 7.1 важное заключение о связи убывания начальных данных для уравнения КдФ на плюс бесконечности с гладкостью его решений и, более того, представить решение в детерминантной форме (7.16). Основная сложность в доказательстве теоремы 2.1 состоит в учете сильной осцилляции символа (1.2), (1.3), которая весьма существенным образом влияет на свойства компактности рассматриваемого оператора Ганкеля. С этой целью мы используем критерий ядерности, содержащийся в ставшей уже классической работе [11] (см. также монографию [12]). Для реализации этого критерия и оценки содержащихся в нем кратных интегралов нам потребовалось использование метода перевала в случае, когда точка перевала близка или совпадает с полюсом подынтегральной функции. На этом пути получены точные асимптотические выражения, что позволяет нам предполагать неулучшаемость результата, содержащегося в теореме 2.1.

В п. 2 мы формулируем основной результат настоящей работы. В п. 3 даются некоторые вспомогательные утверждения и замечания, упрощающие дальнейшие рассмотрения. Основными, в техническом плане, являются пп. 4 и 5, где с помощью метода перевала оцениваются интегралы, содержащиеся в критерии Пеллера. В п. 6 мы доказываем теорему 2.1. Наконец, п. 7 посвящен краткому обзору и истории метода обратной задачи рассеяния для уравнения КдФ, применению основного результата работы к получению новой информации о разрешимости этого уравнения, о свойствах решения и явной формуле для него.

2. Основной результат. Через $\mathfrak{S}_1$ обозначим множество всех ядерных операторов, действующих в пространстве $H^2(\Pi)$. Напомним, что компактный оператор $A \in \mathfrak{S}_1$, если последовательность его сингулярных чисел $\{s_j(A)\}_{j=1}^\infty$ суммируема. При этом норма оператора A в $\mathfrak{S}_1$ определяется следующим образом:

$$\|A\|_{\mathfrak{S}_1} := \sum_{j=1}^{\infty} |s_j(A)|.$$

Наряду с оператором (1.1) мы рассмотрим его производные по параметру x. Легко видеть, что

$$\frac{\partial^j}{\partial x^j}\,\mathbb{H}(\varphi_x) = \mathbb{H}(\varphi_{j,x}), \tag{2.1}$$ {eq2.

где

$$\varphi_{j,x}(\lambda) = (2i)^j \lambda^j \varphi_x(\lambda), \qquad j = 0, 1, 2, \ldots . \tag{2.2}$$ {eq2.

Здесь $\varphi_{0,x}(\lambda) := \varphi_x(\lambda)$. Очевидно, что формула (2.1) корректна в случае, когда $\varphi_{j,x}(\lambda) \in L_\infty(\mathbb{R})$.

Сформулируем главный результат настоящей работы.

Теорема 2.1. *Пусть функция* $\varphi_x(\lambda)$ *имеет вид* (1.2)–(1.4) *с функцией* $g(s) \in L_1(\mathbb{R}_+(1+s)^{j/2})$, $j = 0, 1, 2, \dots$. *Тогда оператор*

$$\frac{\partial^j}{\partial x^j}\,\mathbb{H}(\varphi_x) \in \mathfrak{S}_1, \qquad j = 0, 1, 2, \dots,$$

при этом

$$\left\|\frac{\partial^j}{\partial x^j}\,\mathbb{H}(\varphi_x)\right\|_{\mathfrak{S}_1} \leqslant \begin{cases} L_1, & x > 0, \\ L_2(1+|x|)^{j/2}, & x < 0, \end{cases}$$

где константы L_1, L_2 *не зависят от* $x \in \mathbb{R}$.

3. Теорема Пеллера, основные интегралы и некоторые упрощения. Доказательство теоремы 2.1 основывается на известном результате В. В. Пеллера. Мы говорим, что аналитическая в области Π функция $f(\xi)$ принадлежит пространству $A_1^1(\Pi)$ тогда и только тогда, когда

$$\|f\|_{A_1^1(\Pi)} := \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty |f''(\xi_1 + i\xi_2)|\,d\xi_1\,d\xi_2 + \sup\{f(\xi) \mid \xi_2 \geqslant 1\} < \infty, \tag{3.1}$$ {eq3.

где $\xi = \xi_1 + i\xi_2$ комплексная переменная, принадлежащая комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

Введем модификацию аналитического проектора

$$(\widetilde{P}^+ f)(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^\infty \left(\frac{1}{\tau - \xi} - \frac{\tau}{1+\tau^2}\right) f(\tau)\,d\tau.$$

Теорема 3.1 [11; с. 576]. *Пусть* $\varphi \in L_\infty(\mathbb{R})$. *Тогда* $\mathbb{H}(\varphi) \in \mathfrak{S}_1$ *в том и только том случае, когда*

$$(\widetilde{P}^+ \overline{\varphi})(\xi) \in A_1^1(\Pi). \tag{3.2}$$ {eq3.

Для упрощения доказательства основной теоремы нам потребуется следующий хорошо известный факт.

Лемма 3.2. *Пусть* $\varphi = h\varphi_1$, *где* $h \in H^\infty(\Pi)$ *и* $\varphi_1 \in L_\infty(\mathbb{R})$. *Если оператор* $\mathbb{H}(\varphi_1) \in \mathfrak{S}_1$, *то и оператор* $\mathbb{H}(\varphi) \in \mathfrak{S}_1$, *причем*

$$\|\mathbb{H}(\varphi)\|_{\mathfrak{S}_1} \leqslant \|h\|_{L_\infty} \|\mathbb{H}(\varphi_1)\|_{\mathfrak{S}_1}.$$

Доказательство. В самом деле,

$$\mathbb{H}(\varphi) = JP^-(h)P^-\varphi_1 P^+ = (JP^-hJ)(JP^-\varphi_1 P^+) = (JP^-hJ)\mathbb{H}(\varphi_1).$$

То есть, $\mathbb{H}(\varphi) \in \mathfrak{S}_1$ и

$$\|\mathbb{H}(\varphi)\|_{\mathfrak{S}_1} \leqslant \|JP^-hJ\|_{L_2} \|\mathbb{H}(\varphi_1)\|_{\mathfrak{S}_1} \leqslant \|h\|_{L_\infty} \|\mathbb{H}(\varphi_1)\|_{\mathfrak{S}_1}.$$

Замечание 1. Символ $\varphi_{j,x}(\lambda)$ содержит множитель $T(\lambda) \in H^\infty(\Pi)$. Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать вместо него символ

$$\varphi^0_{j,x}(\lambda) = \lambda^j G_-(\lambda) e^{i\Phi(\lambda, x)}. \tag{3.3}$$ {eq3.

Замечание 2. Лемма 3.2 также дает нам возможность рассматривать вместо символа (3.3) случай символа

$$e^{-i2a\lambda}\varphi^0_{j,x}(\lambda)=\lambda^j G_-(\lambda)e^{i\Phi(\lambda,x-a)},$$

где $a>0$, поскольку $e^{i2a\lambda}\in H^\infty(\Pi)$. Таким образом, в формуле (3.3) будем предполагать, что $x\leqslant -d$, где $d>0$, некоторое число, определенное ниже (см. (4.9)).

Применяя теорему 3.1 к оператору Ганкеля с символом вида (3.3), мы должны прежде всего оценить интегралы

$$I_j(\xi,x):=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\tau-\xi}-\frac{\tau}{1+\tau^2}\right)\tau^j\,\overline{G_-(\tau)}\,e^{-i\Phi(\tau,x)}\,d\tau,\qquad \xi\in\Pi,\quad j=0,1,\dots,\tag{3.4}$$

{eq3.

$$I^{(2)}_j(\xi,x):=\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\tau^j\,\overline{G_-(\tau)}\,e^{-i\Phi(\tau,x)}}{(\tau-\xi)^3}\,d\tau,\qquad \xi\in\Pi,\quad j=0,1,\dots,\tag{3.5}$$

{eq3.

где (3.4) соответствует второму слагаемому в (3.1), а (3.5) – первому слагаемому в этой формуле. Отметим, что (3.5) получается из интеграла (3.4) двукратным дифференцированием по переменной ξ. Конечность осцилляторных интегралов (3.4) и (3.5) доказывается в пп. 4 и 5 соответственно.

4. Оценка интеграла (3.4)**. Метод Перевала.** Согласно (1.4) получаем

$$\overline{G_-(\tau)}=\int_0^\infty e^{i2\tau s}g(s)\,ds.\tag{4.1}$$

{eq4.

Предположим в этой секции и всюду в дальнейшем, что $g(s)\geqslant 0$ почти всюду и $g(s)\in L_1(\mathbb{R}_+,(1+s)^{j/2})$. Таким образом, интеграл (3.4) может быть записан следующим образом:

$$I_j(\xi,x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\tau-\xi}-\frac{\tau}{1+\tau^2}\right)\tau^j e^{-i\Phi(\tau,x)}\left(\int_0^\infty g(s)e^{i2\tau s}\,ds\right)d\tau.\tag{4.2}$$

{eq4.

Меняя порядок интегрирования, получим

$$I_j(\xi,x)=\frac{1}{2}\int_0^\infty g(s)J_j(s,\xi,x)\,ds,\tag{4.3}$$

{eq4.

где

$$J_j(s,\xi,x):=\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\tau-\xi}-\frac{\tau}{1+\tau^2}\right)\tau^j e^{-i\Phi(\tau,x-s)}\,d\tau.\tag{4.4}$$

{eq4.

Ниже мы покажем, что (см. замечание 3)

$$\int_0^\infty g(s)|J_j(s,\xi,x)|\,ds<\infty.$$

Отсюда следует, что интеграл (3.4) конечен. Мы также покажем, что согласно теоремы Фубини повторный интеграл (4.2) существует, а (4.2) и (4.3) равны между собой.

Сделаем замену переменных в (4.4):

$$\tau = \beta(s)u, \quad \xi = \beta(s)\xi', \qquad \text{где} \quad \beta(s) = \left(\frac{(s-x)}{12t}\right)^{1/2}. \tag{4.5}$$ {eq4.

Полагая

$$S(u) = \frac{u^3}{3} - u, \qquad \Lambda(s,x) := \Lambda(s) := \frac{(s-x)^{3/2}}{(3t)^{1/2}},$$

имеем

$$J_j(s,\xi,x) := \widetilde{J}_j(s,\xi',x) = \beta^j(s)\widetilde{I}_j(s,\xi',x) - \beta^{j+2}(s)\widehat{I}_j(s,x), \tag{4.6}$$ {eq4.

где

$$\widetilde{I}_j(s,\xi',x) = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{u^j e^{-i\Lambda(s)S(u)}}{u-\xi'}\, du, \tag{4.7}$$ {eq4.

$$\widehat{I}(s,x) = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{u^{j+1} e^{-i\Lambda(s)S(u)}}{1+\beta^2(s)u^2}\, du. \tag{4.8}$$ {eq4.

Легко заметить, что положительный параметр $\Lambda := \Lambda(s)$ удовлетворяет условию

$$\Lambda(s) \geqslant \Lambda(0) = \frac{(-x)^{3/2}}{(3t)^{1/2}}.$$

Согласно замечанию 2 можно считать $-x \geqslant d$ и, полагая

$$d = (3t)^{1/3}, \tag{4.9}$$ {eq4.

получим, что

$$\Lambda(s) \geqslant 1. \tag{4.10}$$ {eq4.

Таким образом, Λ представляет собой большой положительный параметр и интегралы (4.7), (4.8) могут быть оценены с помощью метода перевала.

Лемма 4.1. *Интеграл* (4.8) *допускает следующую оценку*:

$$|\widehat{I}_j(s,x)| \leqslant \frac{\text{const}}{\beta^2(s)\Lambda^{1/2}(s)}, \tag{4.11}$$ {eq4.

где "const" *не зависит от s и x.*

Доказательство. Найдем контур перевала для интеграла (4.8). Критические точки $u_\pm$ находятся при этом из следующего уравнения:

$$S'(u) = u^2 - 1 = 0, \qquad u_\pm = \pm 1.$$

Легко подсчитать, что

$$S(u_\pm) = \mp\frac{2}{3}, \qquad S''(u_\pm) = \pm 2, \quad S'''(u_\pm) = 2.$$

Таким образом, перевальные контуры определяются посредством следующих уравнений:

$$\begin{aligned} S(u) + \frac{2}{3} &= (u-1)^2 + \frac{1}{3}(u-1)^3 = -iv^2, \qquad v \in \mathbb{R}, \\ S(u) - \frac{2}{3} &= -(u+1)^2 + \frac{1}{3}(u-1)^3 = -iv^2, \qquad v \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{4.12}$$ {eq4.

Нетрудно показать, что уравнения (4.12) однозначно разрешимы при любом $v \in \mathbb{R}$. Обозначим эти решения через $u_\pm(v)$ и введем перевальные контуры

$$\Gamma_\pm := \{z = u_\pm(v) \mid v \in \mathbb{R}\}. \tag{4.13}$$ {eq4.

Легко видеть, что в окрестности критических точек ($u_\pm(0) = \pm 1$) имеют место следующие асимптотические соотношения:

$$u := u_+(v) = 1 + e^{-i\pi/4} v + O(v^2), \qquad v \in [-\varepsilon, \varepsilon], \tag{4.14}$$ {eq4.

$$u := u_-(v) = -1 + e^{i\pi/4} v + O(v^2), \qquad v \in [-\varepsilon, \varepsilon]. \tag{4.15}$$ {eq4.

Если же v достаточно велико, то нетрудно убедиться, что

$$\begin{aligned} u_+(v) &\sim \sqrt[3]{3} e^{i\pi/2} |v|^{2/3}, && v \to -\infty,\\ u_+(v) &\sim \sqrt[3]{3} e^{-i\pi/6} v^{2/3}, && v \to +\infty,\\ u_-(v) &\sim \sqrt[3]{3} e^{i\pi/2} v^{2/3}, && v \to +\infty,\\ u_-(v) &\sim \sqrt[3]{3} e^{i7\pi/6} |v|^{2/3}, && v \to -\infty. \end{aligned} \tag{4.16}$$ {eq4.

Трансформируем контур $\mathbb{R}$ интеграла (4.8) в перевальный контур $\Gamma := \Gamma_+ \cup \Gamma_-$:

$$\widehat{I}_j(s,x) = \frac{1}{\pi i} \int_\Gamma \frac{u^{j+1} e^{-i\Lambda(s) S(u)}}{1 + \beta^2(s) u^2}\, du.$$

Делая замену переменных $u = u_+(v)$ и $u = u_-(v)$, соответственно получим

$$\begin{aligned} \widehat{I}_j(s,x) = \frac{e^{i(2/3)\Lambda(s)}}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u_+^{j+1}(v) e^{-\Lambda(s) v^2} u_+'(v)}{1 + \beta^2(s) u_+^2(v)}\, dv \\ + \frac{e^{-i(2/3)\Lambda(s)}}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u_-^{j+1}(v) e^{-\Lambda(s) v^2} u_-'(v)}{1 + \beta^2(s) u_-^2(v)}\, dv. \end{aligned}$$

Таким образом, согласно метода перевала (см. например Федорюк [13]) получим, что

$$\begin{aligned} \widehat{I}_j(s,x) = \frac{e^{i(2/3)\Lambda(s)}}{\sqrt{\pi i}} \frac{e^{-i\pi/4}}{1 + \beta^2(s)} \frac{1}{\Lambda^{1/2}(s)} \\ + (-1)^{j+1} \frac{e^{-i(2/3)\Lambda(s)}}{\sqrt{\pi i}} \frac{e^{i\pi/4}}{1 + \beta^2(s)} \frac{1}{\Lambda^{1/2}(s)} + O\biggl(\frac{1}{\beta^2(s)\Lambda(s)}\biggr). \end{aligned}$$

Откуда и вытекает соотношение (4.11).

Лемма 4.2. *Интеграл* (4.7) *допускает следующее представление*:

$$\widetilde{I}_j(s,\xi',x) = \widetilde{I}_j^{+}(s,\xi',x) + \widetilde{I}_j^{-}(s,\xi',x) + \widetilde{I}_{j,\mathrm{Res}}(s,\xi',x)$$

где

$$|\widetilde{I}_j^{\pm}(s,\xi',x)| \leqslant \mathrm{const} \begin{cases} \dfrac{1}{|\xi' \mp 1|\Lambda^{1/2}(s)}, & |\xi' \mp 1|\Lambda^{1/2}(s) \geqslant 1,\\ 1, & |\xi' \mp 1|\Lambda^{1/2}(s) \leqslant 1, \end{cases} \tag{4.17}$$ {eq4.

$$|\widetilde{I}_{j,\mathrm{Res}}^{0}(s,\xi',x)| \leqslant \mathrm{const}, \tag{4.18}$$ {eq4.

где “const”, *не зависит от* s, ξ' *и* x.

Доказательство. Перейдем в (4.7) к перевальному контуру Γ $(=\Gamma_+\cup\Gamma_-)$. По пути трансформации $\mathbb{R}$ в Γ может быть пересечен полюс $u=\xi'$. Таким образом, мы получили следующее представление:

$$\widetilde{I}_j(s,\xi',x)=\widetilde{I}_j^{+}(s,\xi',x)+\widetilde{I}_j^{-}(s,\xi',x)+\widetilde{I}_{j,\mathrm{Res}}(s,\xi',x), \tag{4.19}$$ {eq4.

где

$$\widetilde{I}_j^{\pm}(s,\xi',x)=\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma_\pm}\frac{u^j e^{-i\Lambda(s)S(u)}}{u-\xi'}\,du, \tag{4.20}$$ {eq4.

$$\widetilde{I}_{j,\mathrm{Res}}(s,\xi',x)=2(\xi')^j e^{-i\Lambda(s)S(\xi')}X_{D_\Gamma}(\xi'). \tag{4.21}$$ {eq4.

Здесь (4.21) представляет собой вычет в точке $u=\xi'$, а D_Γ – область, лежащая в верхней полуплоскости Π, между кривыми Γ_+ и Γ_-.

Рассмотрим интегралы (4.20). Сделаем замену переменных $u=u_\pm(v)$ соответственно и рассмотрим сначала случай, когда

$$\xi'\in\Pi\setminus D_1,\qquad \xi'\in\Pi\setminus D_{-1},$$

где $D_{\pm1}$ представляют полудиски вида

$$D_{\pm1}=\{|\xi'_\pm-1|\leqslant 1,\ \operatorname{Im}\xi'\geqslant 0\}.$$

В этой ситуации мы можем считать, что

$$\inf_{v\in\mathbb{R}}|u_\pm(v)-\xi'|\geqslant\delta, \tag{4.22}$$ {eq4.

где $\delta>0$ некоторое фиксированное число (в самом деле, если $\xi'\in\Gamma_+$ (Γ_-) или ξ' расположена достаточно близко к Γ_+ (Γ_-), мы можем трансформировать Γ_+ (Γ_-) подходящим образом в окрестности точки ξ').

Таким образом, согласно методу перевала получим, что (см. (4.14), (4.15))

$$\begin{aligned}\widetilde{I}_j(s,\xi',x)&=\frac{e^{\pm i(2/3)\Lambda(s)}}{\pi i}\int_{\Gamma_\pm}\frac{u_\pm^j(v)e^{-i\Lambda(s)s^2}}{u_\pm(v)-\xi'}\,u'_\pm(v)\,dv\\&=\frac{e^{\pm i(2/3)\Lambda(s)\mp i\pi/4}}{\sqrt{\pi i}(\pm1-\xi')}\frac{1}{\Lambda^{1/2}(s)}+O\biggl(\frac{1}{\Lambda(s)}\biggr).\end{aligned}$$

В рассматриваемом случае величина $|\xi'\mp1|\Lambda(s)\geqslant1$ и мы получаем, что верхняя оценка (4.17) выполняется.

Рассмотрим теперь случай $\xi'\in D_1(D_{-1})$. Обозначим через $v_\pm(\xi)$ корень уравнения

$$u_\pm(v)-\xi'=0.$$

Очевидно, что (см. (4.12))

$$v_\pm(\xi')=e^{\mp i\pi/4}(\xi'\mp1)\biggl(1\pm\frac{1}{3}(\xi'-1)\biggr)^{1/2}. \tag{4.23}$$ {eq4.

Воспользуемся следующим представлением:

$$
\begin{aligned}
\widetilde{I}_j^{\pm}(s,\xi',x) &= e^{\pm i(2/3)i\Lambda(s)}(\widetilde{I}_{j,0}^{\pm}(s,\xi',x)+\widetilde{I}_{j,1}^{\pm}(s,\xi',x)) \\
&:= e^{\pm i(2/3)\Lambda(s)}\left(\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\Lambda(s)v^2}}{v-v_{\pm}(\xi')}\,dv+\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}K_j^{\pm}(v,\xi')e^{-\Lambda(s)v^2}\,dv\right),
\end{aligned}
\tag{4.24}
$$

{eq4.

где

$$
K_j^{\pm}(v,\xi') =: \left(\frac{u_{\pm}^j(v)u_+'(v)}{u_{\pm}(v)-\xi'}-\frac{1}{v-v_{\pm}(\xi')}\right).
$$

Легко видеть, что функция $K_j^{\pm}(v,\xi')$ ограничена в окрестности точки $v=v_{\pm}(\xi')$ равномерно по $\xi'\in D_{\pm 1}$. Кроме того, $K_j^{\pm}(v,\xi')$ степенным образом растет на бесконечности относительно v также равномерно по $\xi'\in D_{\pm 1}$. Таким образом, согласно методу перевала имеем, что

$$
|\widetilde{I}_{j,1}^{\pm}(s,\xi',x)\leqslant \mathrm{const}\Lambda^{-1/2}(s), \qquad \Lambda(s)\geqslant 1, \quad |\xi'\pm 1|<1. \tag{4.25}
$$

{eq4.

Полученная оценка показывает, что интегралы $\widetilde{I}_{j,1}^{\pm}(s,\xi',x)$ удовлетворяют (4.17). В самом деле, если $|\xi'\pm 1|\Lambda^{1/2}(s)\geqslant 1$, то выполняется первое неравенство (4.17). Если же $|\xi'\pm 1|\Lambda^{1/2}(s)\leqslant 1$, то второе.

Рассмотрим теперь интегралы $\widetilde{I}_{j,0}^{\pm}(s,\xi',x)$. Они могут быть записаны в следующей форме (см. например Федорюк [13; с. 356])

$$
\widetilde{I}_{j,0}^{\pm}(s,\xi',x)=e^{-v_{\pm}^2(\xi')\Lambda(s)}(1-\Phi(-iv_{\pm}(\xi')\Lambda^{1/2}(s))), \qquad \operatorname{Im} v_{\pm}(\xi')>0, \tag{4.26}
$$

{eq4.

где $\Phi(p):=(2/\sqrt{\pi}\,)\int_0^p e^{-t^2}\,dt$ представляет собой интеграл ошибок. Подчеркнем еще раз, что формула (4.26) верна в предположении, что $\operatorname{Im} v_{\pm}(\xi')>0$. Если $v_{\pm}(\xi')\in\mathbb{R}$, эта формула может пониматься, как предельное значение из верхней полуплоскости. Кроме того отметим, что можно использовать (4.26) и в случае, когда $\operatorname{Im} v_{\pm}(\xi')<0$. Тогда следует учесть, что правая часть (4.26) равна интегралу Коши в (4.24) плюс вычет в точке $v=v^{\pm}(\xi')$. Этот вычет равен вычету (4.21) и в данном случае нет необходимости оценивать (4.21) отдельно.

Используя асимптотику функции $\Phi(p)$ для больших значений p, получим, что

$$
|\widetilde{I}_{j,0}^{\pm}(s,\xi',x)|\leqslant \frac{\mathrm{const}}{|v_{\pm}(\xi')|\Lambda^{-1/2}(s)}, \qquad \text{если} \quad |v_{\pm}(\xi')|\Lambda^{-1/2}(s)\geqslant 1.
$$

Учитывая явный вид функций (4.23), получаем, что $\widetilde{I}_{j,0}(s,\xi',x)$ удовлетворяет верхней оценке (4.17). Для малых p известно следующее асимптотическое соотношение:

$$
\Phi(p)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\,p+o(p^2), \qquad p\to 0.
$$

Таким образом имеем, что

$$
|\widetilde{I}_{j,0}^{\pm}(s,\xi',x)|\leqslant \mathrm{const}, \qquad \text{если} \quad |v^{\pm}(\xi')|\Lambda^{-1/2}(s)\leqslant 1,
$$

т.е. этот интеграл удовлетворяет оценке, стоящей в нижней части (4.17).

Нам осталось оценить выражение (4.21). Напомним, что $S(\xi') = \xi'^3/3 - \xi'$. Легко видеть,что если $\xi' \in D_\Gamma^+$, то

$$\operatorname{Re}(-\Lambda(s)\, S(\xi')) \leqslant 0.$$

Кроме того, если $|\xi' \mp 1| > 1$, то имеет место оценка

$$|e^{\Lambda(s)S(\xi')} \leqslant e^{-c|s-x|^{3/2}|\xi'|^3},$$

где c (>0) не зависит от s, x и $\xi' \in D_\Gamma^+ \setminus D_1$ $(\xi' \in D_\Gamma^+ \setminus D_{-1})$. Таким образом,

$$|\widetilde{I}_{j,\mathrm{Res}}(s,\xi',x)| \leqslant 2|\xi'|^j e^{-c|s-x|^{3/2}|\xi'|^3}.$$

Поскольку $(s-x) \geqslant \Delta > 0$, где Δ – некоторое фиксированное число, то

$$|\widetilde{I}_{j,\mathrm{Res}}(s,\xi',x)| \leqslant \mathrm{const},$$

где “const” не зависит от s, x и ξ'. Таким образом, (4.18) доказана.

Теорема 4.3. *Пусть выражение $I_j(\xi,x)$ задано формулой (4.2) и функция $g(s) \in L_1(\mathbb{R}_+,(1+s)^{j/2})$. Тогда для $j = 0,1,\dots$ имеем*

$$|I_j(\xi,x)| \leqslant \begin{cases} c_1, & x \geqslant 0,\\ c_1 + c_2|x|^{j/2}, & x < 0,\end{cases}$$

где c_1, c_2 не зависят от ξ и x.

Доказательство. Используя представления (4.3), (4.4) и (4.7), (4.8), получим, что

$$I_j(\xi,x) = \frac{1}{2}\int_0^\infty g(s)J_j(s,\xi,x)\,ds = \frac{1}{2}\int_0^\infty g(s)(\beta^j(s)\widetilde{I}_j(s,\xi',x) - \beta^{j+2}\widehat{I}_j(s,x))\,ds. \tag{4.27}$$

{eq4.

Разобьем $I_j(\xi,x)$ согласно (4.27) на две части:

$$2I_j(\xi,x) = I_{j,1}(\xi,x) - I_{j,2}(\xi,x). \tag{4.28}$$

{eq4.

Оценим первую из них:

$$\begin{aligned} I_{j,1}(\xi,s) &:= \int_0^\infty g(s)\beta^j(s)\widetilde{I}_j(s,\xi',x)\,ds\\ &= \int_0^\infty g(s)\beta^j(s)(\widetilde{I}_j^+(s,\xi',x) + \widetilde{I}_j^-(s,\xi',x))\,ds + \int_0^\infty g(s)\beta^j(s)\widetilde{I}_{j,\mathrm{Res}}(s,\xi',x)\,ds\\ &:= I_{j,1,1}(\xi',x) + I_{j,1,0}(\xi',x). \end{aligned} \tag{4.29}$$

{eq4.

Оценим первое слагаемое в (4.29):

$$I_{j,1,1}(\xi',x) \leqslant \int_0^\infty g(s)\beta^j(s)(|\widetilde{I}_{j,0}^+(s,\xi',x)| + |\widetilde{I}_{j,0}^-(s,\xi',x)|)\,ds.$$

Тогда (4.17) позволяют провести следующие оценки. Обозначая

$$w_\pm(s) := |v_\pm(\xi')|\Lambda^{1/2}(s),$$

имеем

$$
\begin{aligned}
|I_{j,1,1}(\xi',x)| &\leqslant \operatorname{const}\biggl(\int_{w_+(s)<1} g(s)\beta^j(s)\,ds + \frac{1}{|v_+(\xi')|}\int_{w_+(s)\geqslant 1} g(s)\frac{\beta^j(s)}{\Lambda^{1/2}(s)}\,ds \\
&\qquad + \int_{w_-(s)<1} g(s)\beta^j(s)\,ds + \frac{1}{|v_-(\xi')|}\int_{w_-(s)\geqslant 1} g(s)\frac{\beta^j(s)}{\Lambda^{1/2}(s)}\,ds\biggr) \\
&\leqslant \operatorname{const}\biggl(\int_{w_+(s)<1} g(s)\beta^j(s)\,ds + \int_{w_+(s)\geqslant 1} g(s)\beta^j(s)\,ds \\
&\qquad + \int_{w_-(s)<1} g(s)\beta^j(s)\,ds + \int_{w_-(s)\geqslant 1} g(s)\beta^j(s)\,ds\biggr) \\
&\leqslant \operatorname{const}\int_0^\infty g(s)\beta^j(s)\,ds \leqslant \operatorname{const}\int_0^\infty g(s)|s-x|^{j/2}\,ds.
\end{aligned}
$$

Напомним, что мы рассматриваем случай $x < -d$ (см. (4.9)). Таким образом, при $x < 0$ имеем, что

$$
|I_{j,1,1}(\xi',x)| \leqslant \operatorname{const}\biggl(\int_0^\infty g(s)(1+s)^{j/2}\,ds + |x|^{j/2}\int_0^\infty g(s)\,dx\biggr). \tag{4.30}
$$
{eq4.

Оценим второе слагаемое в (4.29), используя оценку (4.18):

$$
\begin{aligned}
|I_{j,1,0}(\xi',x)| &\leqslant \int_0^\infty g(s)\beta^j(s)|\widetilde{I}_j^0(s,\xi',x)|\,ds \leqslant \operatorname{const}\int_0^\infty g(s)|s-x|^{j/2}\,ds \\
&\leqslant \operatorname{const}\int_0^\infty g(s)(1+s)^{j/2}\,ds + |x|^{j/2}\int_0^\infty g(s)\,ds.
\end{aligned} \tag{4.31}
$$
{eq4.

Перейдем теперь ко второму слагаемому в (4.28):

$$
|I_{j,2}(\xi,x)| \leqslant \frac{1}{2}\int_0^\infty g(s)\beta^{j+2}(s)\widehat{I}_j(s,x)\,ds.
$$

Согласно лемме 4.1 имеем, что

$$
\begin{aligned}
I_{j,2}(\xi,x) &\leqslant \operatorname{const}\int_0^\infty \frac{g(s)\beta^{j+2}(s)}{\beta^2(s)\Lambda^{1/2}(s)}\,ds \leqslant \operatorname{const}\int_0^\infty g(s)\beta^j(s)\,ds \\
&\leqslant \operatorname{const}\biggl(\int_0^\infty g(s)(1+s)^{j/2}\,ds + |x|^{j/2}\int_0^\infty g(s)\,ds\biggr).
\end{aligned} \tag{4.32}
$$
{eq4.

Поскольку $g(s) \in L_1(\mathbb{R}_+,(1+s)^{j/2})$, $j = 0,1,\dots$, интегралы, фигурирующие в (4.30)–(4.32), конечны. Таким образом, утверждение теоремы 4.3 для $x < 0$ доказано. Утверждение для $x > 0$ следует из замечания 2.

Из данной теоремы вытекает следующий результат, который обеспечивает выполнение части условий теоремы 3.1

Следствие 4.4. *Пусть выражение $I_j(\xi,x)$ задается формулой (4.2) и функция $g(s) \in L_1(\mathbb{R}_+,(1+s)^{j/2})$. Тогда для $j = 0,1,\dots$, имеем*

i) $I_j(\,\cdot\,,x)$ $(=(\widetilde{P}^+\overline{\varphi}_{j,x})) \in L_\infty(\mathbb{R})$,

ii) $\sup_{\operatorname{Im}\xi\geqslant 1}|I_j(\xi,x)| \leqslant \begin{cases} c_1, & x \geqslant 0 \\ c_1 + c_2|x|^{j/2}, & x < 0. \end{cases}$

Замечание 3. Согласно теореме 4.3 повторный интеграл вида

$$\int_0^\infty g(s)|J_j(s,\xi,x)|\,ds$$

конечен. Следовательно, интеграл (4.3) также конечен, и согласно теореме Фубини 4.3 равен исходному интегралу (4.2).

5. Оценка интеграла (3.5). Подставляя представление (4.1) в (3.5), получим, что

$$I_j^{(2)}(\xi,x)=\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\tau^j e^{-i\Phi(\tau,x)}}{(\tau-\xi)^3}\left(\int_0^\infty g(s)e^{i2\tau s}\,ds\right)d\tau.$$

Меняя порядок интегрирования, придем к представлению вида

$$I_j^{(2)}(\xi,x)=2\int_{-\infty}^{\infty} g(s)J_j^{(2)}(s,\xi,x)\,ds, \tag{5.1}$$ {eq5.

где

$$J_j^{(2)}(s,\xi,x):=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\tau^j e^{-i\Phi(\tau,x-s)}}{(\tau-\xi)^3}\,d\tau. \tag{5.2}$$ {eq5.

Делая замену переменных (4.5) в интеграле (5.2), получим, что

$$J_j^{(2)}(s,\xi,x)=\beta(s)^{j-2}\widetilde{I}_j^{(2)}(s,\xi',x), \tag{5.3}$$ {eq5.

с

$$\widetilde{I}_j^{(2)}(s,\xi',x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u^j e^{-i\Lambda(s)S(u)}}{(u-\xi')^3}\,du. \tag{5.4}$$ {eq5.

Рассмотрим вопрос об асимптотике интеграла (5.4) относительно большого параметра $\Lambda(s)$.

Лемма 5.1. *Интеграл (5.4) допускает представление вида*

$$\widetilde{I}_j^{(2)}(s,\xi',x)=\widetilde{I}_{j,+}^{(2)}(s,\xi',x)+\widetilde{I}_{j,-}^{(2)}(s,\xi',x)+\widetilde{I}_{j,\mathrm{Res}}^{(2)}(s,\xi',x),$$

где

$$|\widetilde{I}_{j,\pm}^{(2)}(s,\xi',x)|\leqslant \mathrm{const}\begin{cases}\dfrac{1}{|\xi'\mp1|^3\Lambda^{1/2}(s)}, & |\xi'\mp1|\Lambda^{1/2}(s)\geqslant 1,\\ \Lambda(s), & |\xi'\mp1|\Lambda^{1/2}(s)\leqslant 1,\end{cases} \tag{5.5}$$ {eq5.

$$|\widetilde{I}_{j,\mathrm{Res}}^{(2)}(s,\xi',x)|\leqslant \mathrm{const}\{\Lambda(s)^{-(j-2)/3}|\xi''|^{j-2}(|\xi''|^6+|\xi''|^3+1)e^{-c|\xi''|^3}\}, \tag{5.6}$$ {eq5.

где $\xi''=\xi'\Lambda^{1/3}(s)$, $c>0$ *и* “const” *не зависят от* s, x *и* $\xi'\in\Pi\setminus(D_1\cup D_{-1})$.

Доказательство. Трансформируя контур $\mathbb{R}=(-\infty,\infty)$ в контур перевала $\Gamma=\Gamma_+\cup\Gamma_-$ (см. (4.13)) и делая замену переменных соответственно $u=u_+(S)$ и $u=u_-(s)$ (см. (4.12)), получим следующее представление:

$$\widetilde{I}_j^{(2)}(s,\xi',x)=\widetilde{I}_{j,+}^{(2)}(s,\xi',x)+\widetilde{I}_{j,-}^{(2)}(s,\xi',x)+\widetilde{I}_{j,\mathrm{Res}}^{(2)}(s,\xi',x), \tag{5.7}$$ {eq5.

где

$$\widetilde{I}^{(2)}_{j\pm}(s,\xi',x)=\frac{e^{\pm(2i/3)\Lambda(s)}}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u^j_{\pm}(v)e^{-\Lambda(s)v^2}u'_{\pm}(v)}{(u_{\pm}(v)-\xi')^3}\,dv, \tag{5.8}$$ {eq5.

а

$$\widetilde{I}^{(2)}_{j,\mathrm{Res}}(s,\xi',x)=\mathrm{Res}\biggl(\frac{u^j e^{-i\Lambda(s)S(u)}}{(u-\xi')^3}\biggr)\bigg|_{u=\xi'}X_{D_\Gamma}(\xi'). \tag{5.9}$$ {eq5.

Предположим, что $|\xi'\pm 1|>1$, т.е. $\xi\in\Pi\setminus D_1$ $(\xi'\in\Pi\setminus D_{-1})$. В этом случае мы можем использовать неравенство (4.22).

Согласно методу перевала $(\Lambda(s)\geqslant 1)$ асимптотика интегралов $I^{(2)}_{j,\pm}(s,\xi',x)$ определяется поведением подынтегральных функций в окрестности $v=0$. Поэтому

$$|\widetilde{I}^{(2)}_{j\pm}(s,\xi',x)|\leqslant\frac{\mathrm{const}}{|1\pm\xi'|^3}\,\Lambda^{-1/2}(s),\qquad |\xi'\mp 1|\geqslant 1. \tag{5.10}$$ {eq5.

Отметим, что (5.10) является частным случаем верхней оценки (5.5), поскольку $\Lambda(s)\geqslant 1$.

Рассмотрим случай $\xi\in D_1(\xi'\in D_{-1})$. Используя представление (4.24), получим, что

$$\widetilde{I}^{(2)}_{j\pm}(s,\xi',x)=\frac{\partial^2}{\partial\xi'^2}(\widetilde{I}_j(s,\xi',x))=\frac{\partial^2}{\partial\xi'^2}(\widetilde{I}^{\pm}_{j,0}(s,\xi',x))+\frac{\partial^2}{\partial\xi'^2}(\widetilde{I}^{\pm}_{j,1}(s,\xi',x)). \tag{5.11}$$ {eq5.

Легко видеть, что второе слагаемое в (5.11) имеет вид

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi'^2}\,\widetilde{I}^{\pm}_{j,1}(s,\xi',x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2}{\partial\xi'^2}\,K^{\pm}_j(v,\xi')e^{-\Lambda(s)v^2}\,dv,$$

где функция $K^{\pm}_j(v,\xi')$ записана в (4.24). Отметим, что $(\partial^2/\partial\xi'^2)\,K^{\pm}_j(v,\xi')$ представляет собой непрерывную по v $(\in\mathbb{R})$ функцию, имеющую степенной рост по v на бесконечности. Эти непрерывность и рост равномерны по ξ'. Таким образом, согласно методу перевала имеем

$$\biggl|\frac{\partial^2}{\partial\xi'^2}\,\widetilde{I}^{\pm}_{j,1}(s,\xi',x)\biggr|\leqslant\mathrm{const}\Lambda^{-1/2}(s),\qquad \xi'\in D_{\pm1}. \tag{5.12}$$ {eq5.

Отметим, что (5.12) удовлетворяет первой оценке (5.5), если $|\xi'\,{\pm}\,1|\Lambda^{1/2}(s)\geqslant 1$, либо второй (5.5), если $|\xi'\,{\mp}\,1|\Lambda^{1/2}(s)\leqslant 1$.

Оценим теперь первое слагаемое в (5.11), используя формулы (4.26). Введем функцию

$$F(p)=e^{-p^2}(1-\Phi(p)) \tag{5.13}$$ {eq5.

и положим

$$p_{\pm}(\xi'):=-iv_{\mp}(\xi')\Lambda^{-1/2}(s). \tag{5.14}$$ {eq5.

Тогда

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi'^2}(\widetilde{I}^{\pm}_j(s,\xi',x))=4\bigl((p'(\xi'))^2F''(p(\xi'))+p''(\xi')F'(p(\xi'))\bigr). \tag{5.15}$$ {eq5.

Легко видеть, что

$$p'(\xi') = -iv'_{\pm}(\xi')\Lambda^{1/2}(s), \quad v'_{\pm}(1) \neq 0, \qquad p''(\xi') = -iv''_{\pm}(\xi')\Lambda^{1/2}(s), \quad v''_{\pm}(1) \neq 0,$$

$$F'(0) = -1, \qquad F''(0) = -2,$$

$$F(p) \sim \frac{\sqrt{\pi}i}{p}, \quad p \to \infty, \qquad F'(p) \sim -\frac{\sqrt{\pi}i}{p^2}, \quad p \to \infty, \qquad F''(p) \sim 2\frac{\sqrt{\pi}i}{p^3}, \quad p \to \infty.$$

Если $|p(\xi')| < 1$, то учитывая, что $\Lambda(s) \geqslant 1$, получаем согласно (5.15), что

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial \xi'^2}(\widetilde{I}^{\pm}_{j,0}(s,\xi',x))\right| \leqslant \mathrm{const}(\Lambda(s)), \qquad |v_{\pm}(\xi')|\Lambda^{1/2}(s)| \leqslant 1, \quad |\xi' \mp 1| < 1.$$

Если же $|p(\xi')| \geqslant 1$, то (5.15) и асимптотические представления для F' и F'' дают, что

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial \xi'^2}\,\widetilde{I}^{\pm}_{j,0}(s,\xi',x)\right| \leqslant \mathrm{const}\frac{1}{|v_{\pm}(\xi')|^3\Lambda^{1/2}(s)}, \qquad |v_{\pm}(\xi')|\Lambda^{1/2}(s)| \geqslant 1, \quad |\xi' \mp 1| < 1.$$

Перейдем к доказательству неравенства (5.6). Если $\xi' \in D^{+}_{\Gamma}$, то

$$\begin{aligned}\widetilde{I}_{j,\mathrm{Res}}(s,\xi',x) = \mathrm{Res}\biggl(\frac{u^i e^{-i\Lambda(s)S(u)}}{(u-\xi')^3}\biggr)\biggr|_{u=\xi'} &\frac{1}{2}(\xi'^j(-i(\xi'^2-1))^2\Lambda^2(s) \\ &+ 2(\xi')^{j-1}_{(j-1)}(-i(\xi'^2-1))\Lambda(s) + j(j-1)(\xi')^{j-2})e^{-i\Lambda(\xi')S(\xi')}.\end{aligned}$$

Очевидно, что при $j=0$ второе и третье слагаемые равны нулю, а при $j=1$ равно нулю только третье слагаемое. Отметим, что если $\xi' \in D_\Gamma \setminus (D_1 \cup D_{-1})$ (согласно замечанию, сделанному после (4.26), мы имеем право рассматривать только этот случай), то имеет место неравенство

$$|e^{-i\Lambda(s)S(\xi')}| \leqslant e^{-c\Lambda(s)|\xi'|^3},$$

где c не зависит от ξ' и $\Lambda(s)$. Таким образом, получаем следующую оценку:

$$\begin{aligned}\widetilde{I}^{(2)}_{j,\mathrm{Res}}(s,\xi',x) &\leqslant \mathrm{const}(|\xi'|^{j+4}\Lambda^2(s) + |\xi'|^{j+1}\Lambda(s) + |\xi'|^{j-2})e^{-c\Lambda(s)|\xi'|^3} \\ &\leqslant \mathrm{const}\Lambda^{-(j-2)/3}((|\xi'|\Lambda^{1/3})^{j+4} + (|\xi'|\Lambda^{1/3}(s))^{j+1} \\ &\quad + (|\xi'|\Lambda^{1/3}(s))^{j-2})e^{-c(|\xi'|\Lambda^{1/3}(s))^3}\end{aligned}$$

и неравенство (5.6) доказано.

Теорема 5.2. *Пусть функция $I^{(2)}_j(\xi',x)$ дана формулой* (3.5) *и $g(s) \in L_1(\mathbb{R}_+,(1+|s|)^{j/2})$. Тогда*

$$A(x) := \int_\Pi |I^{(2)}_j(\xi,x)|\,d\xi \leqslant \begin{cases} c_3, & x \geqslant 0,\\ c_3 + c_4|x|^{j/2}, & x < 0,\end{cases}$$

где c_3 и c_4 не зависят от x.

Доказательство. Используя представления (5.1), (5.2) для $I_j^{(2)}(\xi', x)$ и меняя порядок интегрирования в $A(x)$, получим, что

$$A(x) \leqslant \int_0^\infty g(s) \left[\int_\Pi |J_j^{(2)}(s, \xi, x)|\, d\xi \right] ds = \int_0^\infty g(s) \left[\beta^j(s) \int_\Pi |\widetilde{I}_j^{(2)}(s, \xi', x)|\, d\xi' \right] ds. \tag{5.16}$$

{eq5.

Обозначая внутренний интеграл через $A^{(2)}(s, x)$, согласно представления (5.7) разобьем его на три части:

$$A^{(2)}(s, x) := A^{+(2)}(s, x) + A^{-(2)}(s, x) + A^{(2)}_{\mathrm{Res}}(s, x). \tag{5.17}$$

{eq5.

Оценим первое слагаемое (для этого используем оценки (5.5)):

$$\begin{aligned} A^{+(2)}(s, x) &:= \int_\Pi |\widetilde{I}_{j,+}^{(2)}(s, \xi', x)|\, d\xi' \\ &\leqslant \mathrm{const} \left(\int_{|\xi'-1| \leqslant \Lambda^{-1/2}(s)} \Lambda(s)\, d\xi' + \int_{|\xi'-1| > \Lambda^{-1/2}(s)} \frac{d\xi'}{|\xi' - 1|^3 \Lambda^{1/2}(s)} \right) \\ &\leqslant \mathrm{const}(1 + 1) \leqslant \mathrm{const}. \end{aligned} \tag{5.18}$$

{eq5.

Аналогично доказывается, что

$$A^{-(2)}(s, x) \leqslant \mathrm{const}. \tag{5.19}$$

{eq5.

Для оценки третьего слагаемого воспользуемся неравенством (5.6):

$$A^{(2)}_{\mathrm{Res}}(s, x) \leqslant \mathrm{const}\Lambda^{-(j-2)/3} \int_\Pi |\xi''|^{j-2} (|\xi''|^6 + |\xi''|^3 + 1) e^{-c|\xi''|^3}\, d\xi'.$$

Сделаем замену переменных

$$\xi'' = \xi' \Lambda^{1/3}(s).$$

Получим, что

$$A^{(2)}_{\mathrm{Res}}(s, x) \leqslant \mathrm{const}\Lambda^{-j/3} \int_\Pi |\xi''|^{j-2} (|\xi''|^6 + |\xi''|^3 + 1) e^{-c|\xi''|^3}\, d\xi''.$$

Таким образом,

$$A^{(2)}_{\mathrm{Res}}(s, x) \leqslant \mathrm{const}\Lambda^{-j/3}(s). \tag{5.20}$$

{eq5.

Возвращаясь к (5.17) и учитывая (5.18)–(5.20), получим

$$A(x) \leqslant \mathrm{const} \int_0^\infty g(s) \beta^j(s) [1 + 1 + \Lambda^{-1/3}(s)]\, ds.$$

Учитывая, что

$$\Lambda(s) = \mathrm{const}\beta(s)^3,$$

получим, что

$$\begin{aligned} A(x) &\leqslant \mathrm{const} \left[\int_0^\infty g(s) \beta^j(s)\, ds + \int_0^\infty g(s)\, ds \right] \\ &\leqslant \mathrm{const} \left[\int_0^\infty g(s)(s - x)^{j/2}\, ds + \int_0^\infty g(s)\, ds \right]. \end{aligned} \tag{5.21}$$

{eq5.

Проводя рассуждения, аналогичные (4.30)–(4.32), завершаем доказательство теоремы 5.2.

6. Доказательство теоремы 2.1. Покажем, что функция $(\widetilde{P}^{+}\overline{\varphi}_{j,x})(\xi)$ удовлетворяет условиям теоремы 3.1. В самом деле, согласно следствию 4.4 i) и ii) мы имеем, что

$$(\widetilde{P}^{+}\overline{\varphi}_{j,x})(\xi) \in L_{\infty}(\mathbb{R}), \qquad \sup_{\operatorname{Im}\xi\geqslant 1} |(\widetilde{P}^{+}\overline{\varphi}_{j,x})(\xi)| < \infty.$$

Согласно же теореме 5.2 получим, что

$$\int_{\Pi} |(\widetilde{P}^{+}\overline{\varphi}_{j,x})(\xi)|\, d\xi < \infty, \qquad \text{т.е.} \quad (\widetilde{P}^{+}\overline{\varphi}_{j,x})(\xi) \in A_1^1(\Pi).$$

Легко видеть, что оператор $\mathbb{H}(\varphi_{j,x})$ совпадает с оператором Ханкеля $\mathbb{H}((\widetilde{P}^{-}\varphi_{j,x}))$, где проектор $\widetilde{P}^{-} := J\widetilde{P}^{+}J$. Поскольку

$$\overline{(\widetilde{P}^{-}\varphi_{j,x})(\xi)} = (\widetilde{P}^{+}\overline{\varphi}_{j,x})(\xi),$$

то теорема 2.1 доказана.

7. Приложения к уравнению Кортевега-де Фриза. В этом пункте мы применяем результаты, полученные выше, к теории солитонов (см., например, книгу [14] Новикова, Манакова, Питаевского и Захарова). Мы не предполагаем, что читатель знаком с этой теорией и приводим здесь краткое введение. Рассмотрим начальную задачу (Коши) для уравнения Кортевега-де Фриза (КдФ)

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - 6u(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3} = 0, \qquad t \geqslant 0, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{7.1}$$
{eq7.

$$u(x,0) = q(x), \tag{7.2}$$
{eq7.

где $q(x)$ является вещественнозначной функцией класса, который мы укажем ниже. Это уравнение, возможно, является самым знаменитым нелинейным дифференциальным уравнением в частных производных. Оно был получено Кортевегом-де Фризом в 1895 в качестве модели описания мелкой воды, но по существу не использовалось до 50-х годов 20-века, когда было обнаружено, что это уравнение особенно важно в теории физической плазмы. В 1955 г. Ферми, Паста и Улам рассмотрели цепь гармонических осцилляторов с учетом квадратичной нелинейности и исследовали, как энергия одной моды будет переходить на остальные. (Один из первых расчетов, проведенных в динамической теории на компьютере). Они обнаружили, что их система (описываемая КдФ) генерировала периодические циклы с неубывающей амплитудой. Это было поразительное явление, которое тогда не было объяснено. Хотя Ферми, Паста и Улам никогда не публиковали свои наблюдения, уравнение привлекло внимание математиков и физиков-теоретиков. Прорыв произошел в середине 60-х годов, когда Гарднер, Грин, Крускаль и Миура (ГГКМ) нашли поистине гениальный способ линеаризации. Их метод, называемый теперь методом обратной задачи рассеяния (ГГКМ), является важным достижением математики 20-го века и с его помощью мы получили невероятное количество информации об уравнении КдФ и, описываемых, ими физических системах. Здесь приведена лишь небольшая часть увлекательной истории, лежащей в основе изучения уравнения КдФ. Заинтересованный читатель может узнать больше об этом в [14] или любой другой книге по теории солитонов.

Концептуально метод обратной задачи похож на преобразование Фурье и состоит, как и стандартный метод преобразования Фурье, из следующих трех шагов.

1) Прямое преобразование, отображающее (вещественные) начальные данные $q(x)$ в новый набор переменных S_0, в которых (7.1), (7.2) превращается в очень простое обыкновенное линейное дифференциальное уравнение первого порядка для $S(t)$ с начальными данными S_0.

2) Решение этого обыкновенного дифференциального уравнения относительно $S(t)$.

3) Применение обратного преобразования для нахождения $u(x,t)$ по $S(t)$.

Аналогичные методы были разработаны и для многих других эволюционных нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, которые называются полностью интегрируемыми. Каждый из шагов 1–3 включает в себя решение линейного дифференциального уравнения, которое позволяет анализировать интегрируемые системы на уровне, недоступном ни прямым численным методам, ни стандартным методам изучения уравнений в частных производных. Исследование разнообразных реализаций этих шагов для различных интегрируемых систем и начальных условий (включая анализ информации, которую метод обратной задачи дает об этих системах) составляет ядро теории солитонов.

В классическом методе обратной задачи для (7.1), (7.2), когда q быстро убывает при $|x| \to \infty$ (клас Шварца), S_0 представляет собой множество данных распространения, ассоциированных с оператором Шрёдингера $\mathbb{L}_q = -\partial_x^2 + q$ на $L^2(\mathbb{R})$. Решая уравнение Шрёдингера $\mathbb{L}_q u = k^2 u$, находим $S_0 = \{R(k), (\kappa_n, c_n)\}$, где $R(k)$, $k \in \mathbb{R}$, есть коэффициент отражения и (κ_n, c_n), $n = 1, 2, \ldots, N$, представляют собой так называемые данные о связных состояниях, ассоциированные с собственными значениями $-\kappa_n^2$. Точные определения могут быть найдены в [15]. Шаг 2 приводит к

$$S(t) = \{R(k)\exp(8ik^3 t),\ \kappa_n, c_n \exp(8\kappa_n^3 t)\}. \tag{7.3}$$
{eq7.

Шаг 3 сводится к решению обратной задачи рассеяния по восстановлению потенциала $u(x,t)$ (которые сейчас зависят от $t \geqslant 0$) по $S(t)$. Эта процедура приводит к явной формуле, которую обычно называют детерминантом Дайсона:

$$u(x,t) = -2\partial_x^2 \log\det(I + \mathbb{H}(x,t)), \tag{7.4}$$
{eq7.

где $\mathbb{H}(x,t)$ есть оператор Ханкеля $\mathbb{H}(\varphi_{x,t})$ с символом

$$\varphi_{x,t}(k) = R(k)\xi_{x,t}(k) + \sum_{n=1}^{N} \frac{c_n \xi_{x,t}(i\kappa_n)}{\kappa_n + ik}\,. \tag{7.5}$$
{eq7.

Здесь $\xi_{x,t}(k) = \exp\{i(8k^3 t + 2kx)\}$ зависит только от (x,t). Это обстоятельство приводит нас в контекст теории операторов Ханкеля и шаги 1–3 теперь могут быть объединены для краткого прочтения следующим образом:

$$q(x) \to \mathbb{H}(\varphi_{x,t}) \to u(x,t). \tag{7.6}$$
{eq7.

Другим, не менее важным, является случай периодического потенциала q. Хотя было довольно ясно с самого начала, что подход ГГКМ должен работать и здесь, но только в 1974 г. метод обратной задачи был строго разработан в периодическом контексте посредством значительных усилий таких ведущих экспертов, как Дубровин, Флашка, Итс, Марченко, Матвеев, Мак-Кин, Новиков, Трубовиц и др. Мы ссылаемся на исторически самый первый обзор [16] Дубровина–Матвеева–Новикова и книгу 2003 г. Гестези–Холдена [17], где приведена достаточно полная история. Периодический метод обратной задачи сильно отличается от случая ГГКМ. Здесь обратное спектральное преобразование (ГГКМ) опирается на теорию Флоке для $\mathbb{L}_q$, анализ римановых поверхностей, следовательно, намного сложнее, чем случай быстро убывающего потенциала. Временная эволюция спектральных данных здесь, тем не менее, проста (но не просто выводится), а решение $u(x,t))$ часто называется формулой Итца–Матвеева [18]. Форма этой формулы аналогична (7.4), но множитель $\det(I+\mathbb{H}(x,t))$ необходимо заменить многомерной (вообще говоря бесконечномерной) тета-функцией вещественных гиперэллиптических алгебраических кривых, явно вычисленна в терминах спектральных данных ассоциированной задачи Дирихле для $\mathbb{L}_q$. Главной особенностью периодического решения является его квазипериодичность во времени t.

Мы отметили выше два основных класса исходных данных q в (7.1), (7.2), подходящая форма метода обратной задачи которой была найдена во время первоначального бума [19]. Она дает простой закон временной эволюции спектральных данных рассеяния который делает работу IST в этих двух случаях эффективной. Видимо поэтому Кричевер и Новиков заявляют в [20], что (7.1) вполне интегрируема по существу только в этих двух случаях. Фактически вопрос о том, что (7.1), (7.2)[1] можно было бы решить с помощью подходящего метод обратной задачи за пределами этих двух классов, был поднят в той или иной форме (в хронологическом порядке) Маклауд–Олвер [21], Абловиц–Кларксон [22], Марченко [22], Кричевер–Новиков [20], Дайфт [24], Матвеев [23], и Захаров [7] и др. Эти авторы также указывают на многие здесь возникающие препятствия и некоторые считают данную задачу главной нерешенной проблемой.

Эта проблема частично решена в работах [5] и [6], где мы расширили результаты (7.4) до начальных профилей, которые имеют по существу произвольное поведение на $-\infty$. Более конкретно, предполагая пока все еще быстрое убывание на $+\infty$, нам потребовалось только, чтобы спектр $\mathbb{L}_q$ был ограничен снизу, что значительно обобщает предыдущие результаты, в которых $q(x)$ предполагается быстро стремящемся либо к константе (Гуревич и Питаевский [26], Хруслов [27]) либо к периодической функции (Хруслов и Котляров [28]). Для таких начальных данных q символ оператора Ханкеля $\mathbb{H}(x,t)=\mathbb{H}(\varphi_{x,t})$ в (7.4) можно записать в виде

$$\varphi_{x,t}(k)=R(k)\xi_{x,t}(k)+\int_0^a \frac{\xi_{x,t}(is)\,d\rho(s)}{s+ik}\,, \tag{7.7}$$ {eq7.

где $-a^2$ есть нижняя граница спектра $\mathbb{L}_q$ и $\rho(s)$ представляет собой меру со следующими свойствами:

$$\operatorname{Supp}\rho\subseteq[0,a],\qquad d\rho\geqslant 0,\qquad \int_0^a d\rho<\infty. \tag{7.8}$$ {eq7.

[1] Или любой другой интегрируемой системы.

Мера ρ соответствует отрицательному спектру $\mathbb{L}_q$, но ее явное выражение несущественно для нашего рассмотрения. В [5] мы также показываем, что

$$\mathbb{H}(x,t) = \mathbb{H}(\Phi_{x,t}) + \mathbb{H}(\xi_{x,t} R_0), \tag{7.9}$$ {eq7.

где $\Phi_{x,t}$ мероморфная в верхней полуплоскости функция, конкретный вид которой, несущественен и R_0 представляет собой коэффициент отражения q, ограниченный на $(0,\infty)$. Для R_0 мы имеем представление вида

$$R_0(\lambda) = T(\lambda) \int_0^\infty e^{-2i\lambda s} g(s)\, ds, \tag{7.10}$$ {eq7.

где $T \in H^\infty(\Pi)$, так что $T(\lambda) = O(1/\lambda)$, $|\lambda| \to \infty$, g есть некоторая функция, для которой нам необходима только следующая оценка:

$$|g(s)| \leqslant |q(s)| + \mathrm{const} \int_s^\infty |q|. \tag{7.11}$$ {eq7.

В нашей работе [29] доказано, что $\mathbb{H}(\Phi_{x,t})$ представляет собой бесконечногладкую оператор-функцию переменных (x,t) и для любых n, m:

$$\frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n\, \partial t^m} \mathbb{H}(\Phi_{x,t}) \in \mathfrak{S}_1. \tag{7.12}$$ {eq7.

Для оператора $\mathbb{H}(\xi_{x,t} R_0)$ мы доказали, что если $\displaystyle\int^\infty (1+|s|)^N |q(s)|\, ds < \infty$, то

$$\frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n\, \partial t^m} \mathbb{H}(\xi_{x,t} R_0) \in \mathfrak{S}_1$$

для любых n, m, удовлетворяющих условию

$$n + 3m \leqslant 2N - 1. \tag{7.13}$$ {eq7.

Торема 2.1 позволяет улучшить (7.13) до

$$n + 3m \leqslant 2(N-1).$$

Отсюда непосредственно следуют два очевидных факта:

(1) согласно (7.11)

$$\text{если} \quad \int^\infty (1+|x|)^N |q(x)|\, dx < \infty, \qquad \text{то} \quad \int^\infty (1+|x|)^{N-1} |g(x)|\, dx < \infty;$$

(2) выполнено

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbb{H}(\xi_{x,t} R_0) = -\frac{\partial^3}{\partial x^3} \mathbb{H}(\xi_{x,t} R_0).$$

Главная теорема из [29] может быть так же улучшена.

Теорема 7.1. *Предположим, что (вещественный) начальный профиль q в (7.2) удовлетворяет условию*

$$\inf \operatorname{Spec}(\mathbb{L}_q) = -a^2 > -\infty \qquad (\textit{ограничен снизу}), \tag{7.14}$$ {eq7.

$$\int^{\infty} (1+|x|)^N |q(x)|\, dx < \infty, \quad N \geqslant 1 \qquad (\textit{убывает на } +\infty). \tag{7.15}$$ {eq7.

Тогда функция $\tau(x,t) := \det(1+\mathbb{H}(x,t))$ корректно определена на $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$ и ее классические производные $\partial^{n+m}\tau(x,t)/\partial x^n\,\partial t^m$ существуют, если $n+3m \leqslant 2N-1$. Далее для $N \geqslant 3$ проблема Коши (7.1), (7.2) имеет глобальное по времени классическое решение[2]*, которое дается формулой*

$$u(x,t) = -2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\log\tau(x,t), \qquad t>0, \tag{7.16}$$ {eq7.

так что, если $u_b(x,t)$ есть (единственное) классическое решение с данными $q_b = q|_{(b,\infty)}$, то $u_b(x,t)$ сходится к $u(x,t)$ равномерно на компактах в $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$ по $b\to-\infty$. Кроме того, решение $u(x,t)$ n раз дифференцируемо по x и m раз по t, если $0 \leqslant n+3m \leqslant 2N-4$.

Функция $\tau(x,t)$ в теореме 7.1 называется *тау-функцией Хироты* и ее природа варьируется в зависимости от того, где она появляется. Эта функция впервые была отмечена в [30] в качестве замены, которая преобразует уравнение КдФ в так называемое билинейное уравнение КдФ. Литература по $\tau(x,t)$ чрезвычайно обширна, но мы не могли найти строгое доказательство[3] того факта, что определитель $\det(1+\mathbb{H}(x,t))$ корректно определено в классическом Фредгольмовом смысле. Вот почему один из авторов поставил вопрос в [1], принадлежит ли оператор $\mathbb{H}(x,t)$ классу ядерных операторов. Теорема 7.1 дает утвердительный ответ на этот вопрос.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] A. Rybkin, “The Hirota τ-function and well-posedness of the KdV equation with an arbitrary step-like initial profile decaying on the right half line”, *Nonlinearity*, **24**:10 (2011), 2953–2990.

[2] V. A. Marchenko, “Nonlinear Equations and Operator Algebras”, Math. Appl. (Soviet Ser.), **17**, D. Reidel Publ., Dordrecht, 1988.

[3] A. Volberg, P. Yuditskii, “On the inverse scattering problem for Jacobi matrices with the spectrum on an interval, a finite system of intervals or a Cantor set of positive length”, *Comm. Math. Phys.*, **226**:3 (2002), 567–605.

[4] L. Golinskii, A. Kheifets, F. Peherstorfer, P. Yuditskii, “Scattering theory for CMV matrices: uniqueness, Helson–Szegő and strong Szegő theorems”, *Integral Equations Operator Theory*, **69**:4 (2011), 479–508.

[5] S. Grudsky, A. Rybkin, “Soliton theory and Hakel operators”, *SIAM J. Math. Anal.*, **47**:3 (2015), 2283–2323.

[6] A. Rybkin, “KdV equation beyond standard assumptions on initial data”, *Phys. D*, **365** (2018), 1–11.

[2] То есть, по крайней мере, имеет три непрерывных производных по x и одну по t.

[3] Мы столкнулись с некоторыми утверждениями, где этот факт заявлен как очевидный, в то время как в других источниках он упоминается как слишком сложный для доказательства.

[7] D. V. Zakharov, S. A. Dyachenko, V. E. Zakharov, “Bounded solutions of KdV and non-periodic one-gap potentials in quantum mechanics”, *Lett. Math. Phys.*, **106**:6 (2016), 731–740.

[8] D. V. Zakharov, S. A. Dyachenko, V. E. Zakharov, “Primitive potentials and bounded solutions of the KdV equation”, *Phys. D*, **333** (2016), 148–156.

[9] A. Rybkin, “Spatial analyticity of solutions to integrable systems. I. The KdV case”, *Comm. Partial Differential Equations*, **38**:5 (2013), 802–822.

[10] A. Cohen, T. Kappeler, “Solutions to the Korteweg–de Vries equation with initial profile in $L^1_1(R) \cap L_{N^1}(R^+)$”, *SIAM J. Math. Anal.*, **18**:4 (1987), 991–1025.

[11] В. В. Пеллер, “Операторы Ганкеля класса $\mathfrak{S}_p$ и их приложения (рациональная аппроксимация, гауссовские процессы, проблема мажорации операторов)”, *Матем. сб.*, **113 (155)**:4 (12) (1980), 538–581.

[12] V. V. Peller, *Hankel Operators and Their Applications*, Springer, New York, 2003.

[13] М. В. Федорюк, *Метод перевала*, Наука, М., 1977.

[14] S. P. Novikov, S. V. Manakov, L. P. Pitaevskiĭ, V. E. Zakharov, *Theory of Solitons. The Inverse Scattering Method*, Plenum, New York, 1984.

[15] P. Deift, E. Trubowitz, “Inverse scattering on the line”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **32**:2 (1979), 121–251.

[16] Б. А. Дубровин, В. Б. Матвеев, С. П. Новиков, “Нелинейные уравнения типа Кортевега–де Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия”, *УМН*, **31**:1 (187) (1976), 55–136.

[17] F. Gesztesy, H. Holden, *Soliton Equations and Their Algebro-Geometric Solutions*. Vol. I. (1 + 1)-*Dimensional Continuous Models*, Cambridge Stud. Adv. Math., **79**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003.

[18] А. Р. Итс, В. Б. Матвеев, “Операторы Шредингера с конечнозонным спектром и N-солитонные решения уравнения Кортевега–де Фриса”, *ТМФ*, **23**:1 (1975), 51–68.

[19] C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal, R. M. Miura, “Method for solving the Korteweg–de Vries equation”, *Phys. Rev. Lett.*, **19** (1967), 1095–1097.

[20] I. Krichever, S. P. Novikov, “Periodic and almost-periodic potentials in inverse problems”, *Inverse Problems*, **15**:6 (1999), R117–R144.

[21] J. B. McLeod, P. J. Olver, “The connection between partial differential equations soluble by inverse scattering and ordinary differential equations of Painlevé type”, *SIAM J. Math. Anal.*, **14**:3 (1983), 488–506.

[22] M. J. Ablowitz, P. A. Clarkson, *Solitons*, *Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **149**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991.

[23] V. A. Marchenko, “The Cauchy problem for the KdV equation with nondecreasing initial data”, *What is integrability?*, Springer Ser. Nonlinear Dynam., Springer-Verlag, Berlin, 1991, 273–318.

[24] Percy Deift, “Some open problems in random matrix theory and the theory of integrable systems”, *Integrable Systems and Random Matrices*, Contemp. Math., **458**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008, 419–430.

[25] P. Dubard, P. Gaillard, C. Klein, V. B. Matveev, “On multi-rogue wave solutions of the NLS equation and positon solutions of the KdV equation”, *Eur. Phys. J. Special Topics*, **185**:1 (2010), 247–258.

[26] А. В. Гуревич, П. Питаевский, “Нужно название на русском!!! Decay of initial discontinuity in the Korteweg–de Vries equation”, *Письма в ЖЭТФ*, **17**:5 (1973), 193–195.

[27] Е. Я. Хруслов, “Асимптотика решения задачи Коши для уравнения Кортевега–де Фриза с начальными данными типа ступеньки”, *Матем. сб.*, **99 (141)**:2 (1976), 261–281.

[28] Ē. Ya. Khruslov, V. P. Kotlyarov, "Soliton asymptotics of nondecreasing solutions of nonlinear completely integrable evolution equations.", *Spectral Operator Theory and Related Topics*, Adv. Soviet Math., **19**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994, 129–180.

[29] A. Rybkin, "On Peller's characterization of trace class Hankel operators and smoothness of KdV solutions", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **146**:4 (2018), 1627–1637.

[30] R. Hirota, "Exact solution of the Korteweg–de Vries equation for multiple collisions of solitons", *Phys. Rev. Lett.*, **27** (1971), 1192–1194.

С. М. Грудский
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del
Instituto Politécnico Nacional, Мексика
E-mail: grudsky@math.cinvestav.mx

Поступило
05.02.2018

А. В. Рыбкин
University of Alaska Fairbanks, США
E-mail: arybkin@alaska.edu