

УДК 517.948+514.7

Сергею Петровичу Новикову с восхищением

**Вещественно-нормированные дифференциалы:  
пределы на стабильных кривых****С. Грушевский, И. М. Кричевер, Х. Нортон**

В работе исследуется поведение вещественно-нормированных (ВН) мероморфных дифференциалов на римановых поверхностях при вырождении этих поверхностей. Мы описываем все возможные пределы ВН-дифференциалов на стабильной кривой, в частности, доказываем, что вычеты в нодалных точках даются решением соответствующей задачи Кирхгофа на двойственном графе кривой. Мы также доказываем, что пределы нулей ВН-дифференциалов образуют дивизор нулей подкрученного дифференциала, представляющего собой явно описанный набор ВН-дифференциалов на неприводимых компонентах стабильной кривой с полюсами порядка выше первого в некоторых нодалных точках.

Основным техническим средством, используемым в работе, является новый метод построения дифференциалов на гладких римановых поверхностях (применяемый здесь для ВН-дифференциалов, но имеющий большую общность) в окрестности фиксированной стабильной кривой в координатах вклейки (plumbing coordinates). При этом гладкая риманова поверхность рассматривается как дополнение к окрестности нодалных точек на стабильной кривой, граничные окружности которых попарно отождествлены. Задача построения дифференциала на гладкой римановой поверхности с предписанными особенностями сводится к построению дифференциалов с заданными “скачками” на линиях склейки (швах). Этот аддитивный аналог задачи Римана–Гильберта решается новым методом, в котором вместо ядра Коши на гладкой римановой поверхности, полученной вклейкой, итеративно используются интегралы с ядрами Коши на неприводимых компонентах стабильной кривой. Поскольку стабильная кривая фиксирована, для построенного дифференциала можно получить явные оценки, что позволяет провести точный анализ вырождения.

Библиография: 22 названия.

**Ключевые слова:** римановы поверхности, абелевы дифференциалы, краевая задача, вырождения.DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9877>

---

Исследования первого автора были поддержаны Национальным научным фондом (National Science Foundation, грант DMS-15-01265) и стипендией Саймонса по математике (Simons Fellowship, грант № 341858 для Самуила Грушевского).

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение .....	82
1. Пределы решений задачи Кирхгофа .....	89
2. Обозначения для ВН-дифференциалов и модулей джет-кривых .....	97
3. Формулировки результатов: пределы ВН-дифференциалов .....	98
4. Конструкция вклейки для римановых поверхностей .....	103
5. Задача о скачках .....	106
6. Вещественно-нормированный дифференциал в координатах вклейки ..	119
7. Предельный ВН-дифференциал. Доказательство теоремы 3.7 .....	126
8. Пределы нулей ВН-дифференциалов .....	128
9. Дополнение: $m$ -сбалансированное приближение .....	141
Список литературы .....	146

## Введение

Гладкая кривая  $s$  (предписанными) джетами, или джет-кривая  $X$  – это риманова поверхность  $C$  с различными отмеченными точками  $p_1, \dots, p_n \in C$ , в которых заданы сингулярные части  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  мероморфного дифференциала. Если вычет  $r_\ell$ , заданный в каждой точке  $p_\ell$ , чисто мнимый, причем  $\sum r_\ell = 0$ , то на  $C$  существует единственный мероморфный дифференциал  $\Psi$ , голоморфный на  $C \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$ , с сингулярными частями  $\sigma_\ell$  в точках  $p_\ell$ , и такой, что все его периоды вещественны. Он называется *вещественно-нормированным* (ВН) мероморфным дифференциалом. Настоящая работа продолжает исследование свойств таких дифференциалов и их возможных приложений к изучению геометрии пространства модулей кривых. Ее непосредственной целью является анализ поведения ВН-дифференциалов при вырождении римановой поверхности в стабильную сингулярную кривую.

**Задача о скачках.** Основным инструментом нашего исследования является новый аналитический метод изучения поведения дифференциалов на римановых поверхностях при вырождении последних. Этот метод позволяет явно описать зависимость дифференциалов от так называемых *координат вклейки* (plumbing coordinates) на пространстве модулей кривых. Кратко приведем необходимые для объяснения обозначения; соответствующая постановка детально описывается в разделе 4. Зафиксируем нодальную кривую  $C$ . Ее двойственным графом называется граф  $\Gamma$ , чьи вершины  $v$  соответствуют неприводимым компонентам  $C^v$  нормализации  $C$ , а (неориентированные) ребра, обозначаемые через  $|e|$ , соответствуют нодальным точкам  $q_{|e|} \in C$ . Для ребер  $\Gamma$ , на которых выбрана ориентация, будет использоваться обозначение  $e$ . Если ориентированное ребро  $e$  начинается в вершине  $v$ , то будем говорить, что оно соответствует прообразу  $q_e \in C^v$  нодальной точки  $q_{|e|} \in C$ . Ребро  $e$  с противоположной ориентацией обозначается через  $-e$ . Введем также обозначения  $E$  и  $|E|$  для множеств ориентированных и неориентированных ребер соответственно.

Конструкция вклейки (plumbing) дает описание версальных деформаций кривой  $C$  в компактификации Делиня–Мамфорда, т. е. описание координат

на пространстве  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ , трансверсальных граничному страту, содержащему  $C$ . Чтобы ввести координаты вклейки  $\underline{s} = (s_1, \dots, s_{\#|E|})$ , вблизи каждой точки  $q_e$  на нормализации кривой  $C$  раз и навсегда зафиксируем локальную координатную функцию  $z_e$ . Пусть  $\widehat{C}_{\underline{s}}$  – дополнение в  $C$  к объединению дисков  $|z_e| < \sqrt{|s_{|e|}|}$  с центрами в  $q_e$ . Оно является римановой поверхностью с компонентами края  $\gamma_e := \{|z_e| = \sqrt{|s_{|e|}|}\}$ . Определим компактную риманову поверхность  $C_{\underline{s}}$ , отождествив граничные компоненты  $\gamma_e$  и  $\gamma_{-e}$  с помощью отображения  $I_e: z_e \mapsto s_{|e|}/z_e$ . Комплексная структура на  $C_{\underline{s}}$  вводится таким образом, что голоморфные в этой структуре функции *непрерывны* на возникающем при этом “шве”  $\gamma_{|e|} \subset C_{\underline{s}}$ . Поверхность  $C_{\underline{s}}$  является гладкой тогда и только тогда, когда каждое из чисел  $s_{|e|}$  отлично от нуля.

При таком описании дифференциал на  $C_{\underline{s}}$  – это дифференциал на  $\widehat{C}_{\underline{s}}$ , граничные значения которого на  $\gamma_e$  и  $\gamma_{-e}$  переводятся друг в друга отображением  $I_e$ ; иными словами, на шве  $\gamma_{|e|}$  у дифференциала нет “скачка”. Наш подход к построению дифференциалов на  $\widehat{C}_{\underline{s}}$  с заданными сингулярными частями нетрадиционен. Сначала мы задаем мероморфные дифференциалы с нужными особенностями на каждой из неприводимых компонент. Их граничные значения не согласуются, т. е. на швах соответствующий дифференциал имеет скачки. На втором шаге мы решаем задачу о построении дифференциала на  $\widehat{C}_{\underline{s}}$ , который голоморфен вне швов, на которых его скачки равны скачкам определенного на первом шаге дифференциала. Вычитая затем один дифференциал из другого, мы получаем искомый дифференциал, так как он имеет нужные особенности и непрерывен на швах.

Интересующая нас *задача о скачках* заключается в построении на римановой поверхности с краем подходящим образом нормированного дифференциала, имеющего заданные разности граничных значений на попарно отождествленных граничных окружностях. Эквивалентным образом, задача состоит в построении дифференциала на компактной римановой поверхности, в дополнении к некоторому множеству непересекающихся замкнутых петель, у которого заданы скачки при переходе с одной стороны каждой петли на другую сторону. В зависимости от ситуации нам будет удобнее говорить о задаче о скачках то на кривой  $\widehat{C}_{\underline{s}}$ , то на кривой  $C_{\underline{s}}$ .

Задача о скачках традиционно (см. [19], [22]) решается интегрированием скачков с должным образом нормированным ядром Коши на поверхности, т. е. в нашем случае на  $C_{\underline{s}}$ . При этом классическом подходе очень сложно проанализировать, как ведет себя решение при вырождении поверхности, поскольку само ядро Коши при изменении  $\underline{s}$  меняется, а при  $\underline{s} \rightarrow 0$  вырождается. В техническом аспекте центральным элементом статьи является новый метод решения задачи о скачках, которым можно получить явные оценки решения при вырождении поверхности.

Мы будем считать  $\widehat{C}_{\underline{s}}$  подмножеством нормализации кривой  $C$ . Решение задачи о скачках дается в терминах интегралов Коши с *не зависящими* от  $\underline{s}$  ядрами на  $C^v$ . Нетривиальным является нахождение подынтегральной функции, которая после свертки с ядром Коши дает нужный результат. Связь подынтегральной функции и искомого скачка дается неоднородным интегральным

уравнением. Мы доказываем, что норма интегрального оператора достаточно близка к 1 и поэтому решение задачи дается в виде рекуррентно заданного ряда.

Главным техническим результатом работы является реализация этого построения в координатах вклейки в предложении 5.2 и необходимые для этого оценки, полученные в предложении 5.3. Это позволит нам строить и оценивать ВН-дифференциалы равномерно во всей окрестности кривой  $C$  в пространстве модулей.

Хотя мы используем эту технику для изучения пределов дифференциалов и их нулей, ее также можно использовать, к примеру, для изучения поведения нормированного базиса голоморфных дифференциалов. В работе [11] К. Ху и третий автор использовали развитый здесь подход к задаче о скачках для обобщения и нового доказательства результатов Ямады о вырождениях матриц периодов.

**Пределы ВН-дифференциалов.** Предложенная нами конструкция ВН-дифференциалов будет использована для исследования их вырождений. Первый из полученных нами результатов дает описание пределов ВН-дифференциалов с произвольными вычетами. Поскольку мы находимся в вещественно-аналитической ситуации, мы сформулируем этот результат для вырождающихся последовательностей (а не для семейств) римановых поверхностей. Рассмотрим последовательность  $\{X_k\}$  гладких джет-кривых, сходящуюся к стабильной джет-кривой  $X$ . При этом соответствующие гладкие кривые  $C_k$  с координатами вклейки  $\underline{s}_k$  сходятся к нодальной кривой  $C$  с двойственным графом  $\Gamma$ . Краткую форму нашего первого результата можно сформулировать следующим образом.

**ТЕОРЕМА 0.1** (теорема 3.7 и предложение 3.14). *Пусть  $\{X_k\}$  – последовательность гладких джет-кривых, сходящаяся к стабильной джет-кривой  $X$ . Тогда предельный ВН-дифференциал  $\Psi := \lim_{k \rightarrow \infty} \Psi_k$  существует в том и только том случае, когда сходятся решения задачи Кирхгофа с источниками интенсивности  $it_{\ell,k}$  и сопротивлениями  $\log |\underline{s}_k|$ . Если предел  $\Psi$  существует, то  $\Psi|_{C^v}$  – это ВН-дифференциал с предписанными особенностями в отмеченных точках  $p_\ell$ , лежащих на кривой  $C^v$ , и с простыми полюсами в прообразах нодальных точек, вычеты в которых задаются решениями соответствующей предельной многомасштабной задачи Кирхгофа с источниками.*

Таким образом, существование предельного ВН-дифференциала зависит от существования предела у решений задачи Кирхгофа с источниками на двойственном графе стабильной кривой (см. точную общую постановку задачи Кирхгофа в определении 1.2). Как это ни удивительно, классическая по форме задача нахождения и параметризации всех возможных пределов решений задачи Кирхгофа с источниками при стремлении к нулю некоторых сопротивлений, по-видимому, раньше не рассматривалась. В лемме 1.13 мы покажем, что если сопротивления (т. е. в нашем случае величины  $\log |\underline{s}_k|$ ) сходятся на подходящем

многократном ориентированном вещественном раздутии  $\mathbb{S}_+^{\#|E|-1}$  неотрицательного сектора вещественной сферы  $S^{\#|E|-1} := (\mathbb{R}_{\geq 0}^{\#|E|} \setminus \{0\})/\mathbb{R}_{>0}$  (см. определение 1.10), то сходятся и решения задачи Кирхгофа. Подобные вырождающиеся последовательности мы назовем *допустимыми* и покажем, что в случае допустимой последовательности предел решений задачи Кирхгофа с источниками дается решением предельной задачи, которую мы назовем *многомасштабной задачей Кирхгофа* (см. определение 1.11), в которой сопротивление задается точкой на  $\mathbb{S}_+^{\#|E|-1}$ . Нужные для этой задачи определения оказываются достаточно сложными, и мы дадим их точную формулировку только в разделе 3, в виде теоремы 3.7, после того как в разделе 1 введем необходимые обозначения.

Доказательство вышеупомянутой теоремы о пределах ВН-дифференциалов проводится с помощью задачи о скачках. Оно начинается с набора ВН-дифференциалов на неприводимых компонентах  $C^v$  нодальной кривой  $C$ , вычеты которых в нодальных точках даны решениями предельной многомасштабной задачи Кирхгофа с источниками. При этом мы будем строить решение задачи о скачках, удовлетворяющее условию нормировки, которое гарантирует, что все периоды вдоль циклов, лежащих вне окрестности нодальных точек, вещественны, а затем найдем такое возмущение для вычетов в виде явно заданного ряда по параметрам вклейки (см. (6.11)), что получающийся в итоге дифференциал является вещественно-нормированным. Заключительная часть доказательства опирается на оценки решения задачи о скачках, гарантирующие, что поправочные члены в пределе обращаются в нуль.

**Пределы нулей ВН-дифференциалов.** Нули дифференциалов играют важнейшую роль в различных вопросах, касающихся исследований пространства модулей. В тейхмюллеровской динамике исследуются орбиты на так называемом “страте” – пространстве модулей римановых поверхностей с определенными на них голоморфными дифференциалами, имеющими заданный набор кратностей нулей. Для возможных приложений к тейхмюллеровской динамике и для применения результатов об общих нулях пары ВН-дифференциалов к оценке числа каспов плоских кривых в готовящейся работе [10], естественно исследовать пределы нулей дифференциалов при вырождении кривых. Сложность этой задачи заключается в том, что предельный дифференциал  $\Psi$  может оказаться тождественным нулем на какой-нибудь неприводимой компоненте  $C^v$ . При алгебро-геометрическом подходе к этому вопросу надо рассматривать предельные линейные системы, теория которых для произвольной стабильной кривой еще не вполне разработана (см. тем не менее недавние продвижения, достигнутые в [18]). В работе [2] авторы подходят к этой проблеме, деформируя (в координатах вклейки или с помощью конструкции поверхностей с плоской метрикой) дифференциалы с предписанными нулями на неприводимых компонентах стабильных кривых.

В нашем подходе к исследованию пределов нулей ВН-дифференциалов снова используется задача о скачках, в которой удастся продвинуться дальше благодаря лучшему первоначальному приближению решения. Для вычисления пределов ВН-дифференциалов мы начинали с набора ВН-дифференциалов на  $C^v$ ,

которые в итоге должны были оказаться пределами, а затем мы строили дифференциалы на близлежащих гладких кривых с помощью задачи о скачках. При этом на какой-то компоненте  $C^v$  начальный дифференциал мог оказаться тождественным нулем, если таковым должен был быть предельный дифференциал на  $C^v$ . Теперь же мы начинаем с набора ВН-дифференциалов, не равных тождественно нулю ни на какой из неприводимых компонент  $C^v$ . Это позволяет получить лучшее приближение к ВН-дифференциалу на  $C_{\underline{s}}$ . Из ключевой оценки (8.19) следует, что решение задачи о скачках, поставленной исходя из этого лучшего приближения, имеет более высокий порядок малости, чем порядок масштабирования, необходимого для вычисления первого ненулевого члена и, следовательно, предельного положения нулей.

Затем, как и прежде, нам потребуется оценка, показывающая, что решение задачи о скачках мажорируется исходными ВН-дифференциалами и, таким образом, исчезает в пределе. Для этого надо убедиться, что соответствующим образом масштабированные ВН-дифференциалы обладают следующим свойством: в окрестностях точек  $q_e$  и  $q_{-e}$  сингулярная часть дифференциала с одной стороны сокращается с образом при отображении  $I_e$  нескольких первых регулярных членов разложения дифференциала с другой. В этом заключается идея так называемых наборов *сбалансированных* дифференциалов, которую мы развиваем в разделе 8.

Вырождающуюся последовательность гладких джет-кривых назовем *джет-сходящейся*, если у дифференциалов, построенных с использованием этого условия сбалансированности, сингулярные части в нодальных точках сходятся после подходящего масштабирования (см. точную формулировку в определении 8.8). Поскольку нули дифференциалов не меняются от умножения дифференциалов на константу, то для джет-сходящихся последовательностей существуют пределы нулей ВН-дифференциалов, которые оказываются нулями исходно взятого набора ненулевых ВН-дифференциалов на  $C^v$ .

Кратко наш основной результат о пределах нулей можно сформулировать следующим образом.

**ТЕОРЕМА 0.2** (теорема 8.12 и следствие 8.20). *Любая допустимая последовательность гладких джет-кривых  $\{X_k\}$ , сходящаяся к стабильной джет-кривой  $X$ , содержит джет-сходящуюся подпоследовательность. Для джет-сходящихся последовательностей нули ВН-дифференциалов имеют пределы. Эти пределы нулей являются дивизором нулей соответствующего подкрученного ВН-дифференциала на  $X$ . Вычеты подкрученного ВН-дифференциала даются решением подходящей задачи Кирхгофа с источниками.*

Под подкрученным ВН-дифференциалом мы имеем в виду набор *ненулевых* ВН-дифференциалов  $\Phi^v$  на неприводимых компонентах  $\{C^v\}$  с предписанными особенностями в точках  $p_e$  и с полюсами порядка выше первого в некоторых из прообразов нодальных точек. Дивизором нулей такого подкрученного дифференциала называется множество его нулей, лежащих вне нодальных точек, с учетом кратности, а также множество нодальных точек с подходящими кратностями. Для точных формулировок этих результатов надо сначала развить

понятие сбалансированных дифференциалов и соответствующий аппарат, а также получить нужные оценки для решения задачи о скачках. Это сделано в разделе 8, где точный вариант нашего основного результата формулируется в виде теоремы 8.12.

Поскольку нашей конструкцией можно приблизить ВН-дифференциал на любой джет-кривой из окрестности заданной стабильной джет-кривой, она описывает *все* возможные пределы нулей. Таким образом, фактически получается компактификация пространства модулей джет-кривых, на которой существуют пределы нулей ВН-дифференциалов. Эта компактификация допускает описание как некоторое вещественное раздутие и заслуживает специального исследования.

**Работы по близким вопросам.** В настоящее время вопрос об описании замыканий стратов римановых поверхностей с мероморфными дифференциалами на них активно исследуется – см., например, работы [6], [4], [5], [2], где ответ также дается в терминах подкрученных мероморфных дифференциалов на стабильной кривой.

Однако наш аналитический подход с использованием задачи о скачках совершенно отличен от применяемых там методов; благодаря ему мы, в частности, можем с произвольной точностью описать ВН-дифференциал на *любой* гладкой джет-кривой из окрестности стабильной джет-кривой. В частности, мы получаем явное описание предельных вычетов с помощью задачи Кирхгофа.

**История исследований.** Мнимая часть  $F := \text{Im} \int \Psi$  интеграла от ВН-дифференциала является однозначной гармонической функцией на  $C \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$ . В этой форме гармонических функций, являющихся потенциалами электромагнитного поля, создаваемого точечными зарядами в отмеченных точках, ВН-дифференциалы с простыми полюсами изучались, по крайней мере, со времен Максвелла. В некотором варианте общее понятие ВН-дифференциала появилось еще в книге [20], но в полной общности их исследование было начато вторым автором в работах [12] и [13], мотивированных спектральной теорией операторов и уиземовской теорией возмущений алгебро-геометрических решений солитонных уравнений. В работах [8], [9] первый и второй авторы использовали ВН-дифференциалы для нового доказательства теоремы Диаса о полных комплексных подмногообразиях пространства модулей кривых  $\mathcal{M}_g$ , и установили их связь с локусами спектральных кривых эллиптической системы Калоджеро–Мозера. В работе [14] второй автор использовал ВН-дифференциалы для доказательства гипотезы Арбарелло о подмногообразиях пространства  $\mathcal{M}_g$ .

Предварительная версия изложения результатов нашей работы, не использующая задачу о скачках и не содержащая полной формулировки теоремы 8.12, содержалась в диссертации [17] третьего автора, защищенной в 2014 г. С тех пор мы развили излагаемый здесь подход, использующий наше решение задачи о скачках. Наша работа и доказательство совершенно независимы от результатов в том же направлении по компактификации стратов дифференциалов с заданными нулями, полученных в работах [6], [4], [5], [2].



**Структура статьи.** Сначала, в разделе 1, мы формулируем задачу Кирхгофа на графе общего вида и исследуем свойства ее решений; мы доказываем, что решения априори ограничены, и строим раздутие  $\mathbb{S}_+^{\#E-1}$  неотрицательного октанта сферы такое, что сходимостъ сопротивлений в этом пространстве ведет к сходимости решений задачи. Материал раздела элементарен и не затрагивает римановых поверхностей и дифференциалов. Постановка задачи и леммы из этого раздела существенны для формулировок наших основных результатов.

В разделе 2 напоминаются обозначения, используемые для пространств джет-кривых и ВН-дифференциалов. В разделе 3 вводятся необходимые обозначения и понятия для вырождающихся последовательностей и дается точная формулировка основной теоремы 3.7 о пределах ВН-дифференциалов. В разделе 4 мы напоминаем понятие координат вклейки (plumbing coordinates) и соответствующие обозначения. В разделе 5 излагаются технические основы наших построений: мы ставим задачу о скачках и используем ядра Коши, не зависящие от параметров вклейки, для построения почти ВН-решения и для оценки его нормы. В разделе 6 почти ВН-решение задачи о скачках используется для явного построения ВН-дифференциала в координатах вклейки в виде суммы рекуррентно заданного ряда, а члены этого ряда эффективно оцениваются. В разделе 7 выясняется, как ведет себя эта конструкция ВН-дифференциалов на вырождающейся последовательности кривых, и доказывается основная теорема 3.7 о предельных ВН-дифференциалах.

В разделе 8 вводится понятие пары сбалансированных дифференциалов (взаимно сокращающихся до порядка  $m$  после отображения  $z \mapsto sz^{-1}$  в нодалной точке), полезное при построении лучшего начального приближения к ВН-дифференциалу. Исходя из набора сбалансированных дифференциалов на  $C^v$ , мы показываем, что почти ВН-решение соответствующей задачи о скачках мажорируется самими дифференциалами, так что в пределе вклад сбалансированных дифференциалов оказывается решающим – это и дает основную теорему 8.12 о пределах нулей ВН-дифференциалов.

В дополнении (раздел 9) мы развиваем понятие набора дифференциалов на  $C^v$ , близких к дифференциалу на гладкой джет-кривой в окрестности стабильной джет-кривой. Точнее, мы вводим понятие аппроксимации  $m$ -го порядка. Хотя результаты, изложенные в дополнении, не требуются для доказательства основных результатов настоящей работы, мы их приводим, поскольку, по мнению авторов, этот метод может быть полезен для более точного анализа поведения вырождающихся дифференциалов, что станет предметом других работ.

Второй автор признателен Колумбийскому университету за гостеприимство, оказанное ему в январе–марте 2016 г., в период, когда была выполнена значительная часть нашей работы. Мы благодарны Скотту Вольперту за тщательное прочтение диссертации третьего автора, а также за многочисленные полезные обсуждения и пояснения по вопросам, связанным с конструкцией вклейки для комплексных кривых.



### 1. Пределы решений задачи Кирхгофа

В этом разделе ставится задача Кирхгофа на произвольном графе в нужной нам общности. Мы изучаем пределы решений этой задачи. В дальнейшем эта постановка будет использована для формулировки основных результатов.

**ОБОЗНАЧЕНИЯ 1.1.** Через  $\Gamma$  обозначим граф, т.е. набор вершин  $v \in V(\Gamma)$  и набор ребер  $|e| \in |E|(\Gamma)$ , где допускаются петли и параллельные ребра. Также обозначим множество ориентированных ребер  $e$  через  $E(\Gamma)$ , и будем обозначать через  $-e$  то же ребро, что и  $e$ , но наделенное противоположной ориентацией, а через  $|e| = |-e|$  соответствующее неориентированное ребро. У рассматриваемых нами графов могут также быть полуредра, инцидентные некоторым вершинам. Если  $e$  – ориентированное ребро, то через  $v(e)$  обозначим его конец, а если  $v$  – вершина, то пусть  $E_v$  – множество входящих в нее ребер, т.е.

$$E_v = \{e \in E(\Gamma) : v(e) = v\}.$$

Через  $\#E$ ,  $\#|E|$ ,  $\#V$  обозначим мощности этих множеств. Чертой снизу будем обозначать элементы  $\#E$ -мерного или  $\#|E|$ -мерного векторного пространства; к примеру,  $\underline{c}$  – это набор чисел  $c_e$  для всех  $e \in E$ , а  $\underline{\rho}$  – набор чисел  $\rho_{|e|}$  (в каждом случае мы будем уточнять, рассматриваются ориентированные или неориентированные ребра).

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2** (задача Кирхгофа). *Общая задача Кирхгофа* на графе  $\Gamma$  заключается в следующем. В качестве начальных данных каждому полуредру  $\ell$ , о котором мы будем говорить как об источнике, ставится в соответствие вещественное число  $f_\ell \in \mathbb{R}$ , трактуемое как входящий (или выходящий, если знак отрицателен, но мы будем всегда говорить “входящий”) ток. Мы будем также называть  $f_\ell$  интенсивностью источника. Каждому неориентированному ребру  $|e|$  графа  $\Gamma$  ставится в соответствие положительное число  $\rho_{|e|} \in \mathbb{R}_+$ , трактуемое как сопротивление. Кроме того, в первой группе когомологий графа фиксируется класс когомологий  $\mathcal{E} \in H^1(\Gamma, \mathbb{R})$ , рассматриваемый как электродвижущая сила (ЭДС).

Задача Кирхгофа заключается в нахождении для всякого ориентированного ребра  $e \in E(\Gamma)$  такого вещественного числа  $c_e$  (силы электрического тока), что множество всех чисел  $\underline{c} = \{c_e\}_{e \in E(\Gamma)}$  удовлетворяет следующим условиям:

- (0)  $c_e = -c_{-e}$  для всякого  $e \in E(\Gamma)$ ;
- (1) в каждой вершине полная сумма токов равна нулю: для каждой вершины  $v \in V(\Gamma)$

$$\sum_{e \in E_v} c_e = - \sum' f_\ell, \tag{1.1}$$

- где сумма в правой части берется по всем полуредрам  $\ell$ , инцидентным  $v$ ;
- (2) для каждого ориентированного цикла из ребер  $\gamma \subset \Gamma$  полное падение напряжения равно ЭДС по этом циклу:

$$\sum_{e \in \gamma} c_e \rho_{|e|} = \mathcal{E}_\gamma := \langle \mathcal{E}, \gamma \rangle. \tag{1.2}$$

Используя современную терминологию, в задаче Кирхгофа требуется найти 1-форму на графе с заданными периодами вдоль циклов. В физике это задача расчета электрических токов. Классическим фактом в физике является то, что соответствующие токи всегда существуют, причем определены однозначно.

**ФАКТ 1.3.** *Для каждого связного графа  $\Gamma$ , если сумма всех источников  $f_\ell$  равна нулю, то у общей задачи Кирхгофа есть единственное решение.*

Задача Кирхгофа является системой линейных неоднородных уравнений на  $\underline{c} = \{c_e\}$ , правая часть которой определена интенсивностями  $f_\ell$  источников и ЭДС  $\mathcal{E}$ . Так как искомое решение линейно зависит от правых частей, то оно является суммой решений задач, включающих только источники  $f$  или только ЭДС  $\mathcal{E}$ . Мы рассмотрим два этих частных случая по отдельности.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4.** *Задача Кирхгофа с источниками* – это специальный случай общей задачи Кирхгофа, когда ЭДС  $\mathcal{E}$  равна нулю.

*Задача Кирхгофа с ЭДС* – это специальный случай общей задачи Кирхгофа, когда все источники равны нулю, т. е.  $f_\ell = 0$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.5.** Решение задачи Кирхгофа с источниками не меняется, если умножить весь набор  $\underline{\rho} = \{\rho_{|e|}\}$  на некоторый коэффициент  $\mu \in \mathbb{R}_+$ , а  $\{f_\ell\}$  оставить теми же. Таким образом, начальные данные в задаче Кирхгофа с источниками естественно трактовать как точку  $\mathbb{P}\underline{\rho} \in S_{>0}^{\#|E|-1}$ , где  $S_{>0}^{\#|E|-1} := \mathbb{R}_+^{\#|E|} / \mathbb{R}_+$  – положительный октант вещественной сферы.

Решение задачи Кирхгофа с ЭДС однородно относительно масштабирования сопротивлений: если все сопротивления  $\rho_{|e|}$  умножить на коэффициент  $\mu \in \mathbb{R}_+$ , а ЭДС  $\mathcal{E}$  оставить той же, то  $\underline{c}$  умножается на коэффициент  $\mu^{-1}$ . Так что если считать начальные данные точкой пространства  $\mathbb{P}\underline{\rho} \in S_{>0}^{\#|E|-1}$ , то решение тоже определено как точка проективного пространства.

Решающее значение для последующих приложений играют полученные нами *априорные оценки* токов в решении задачи Кирхгофа. Возможность их получения обусловлена тем, что все сопротивления – положительные числа. Исходя из свойств однородности естественно ожидать, что такая оценка в задаче Кирхгофа с источниками не зависит от  $\underline{\rho}$ , а в задаче с ЭДС оценка должна быть линейной по  $1/\rho$ . Докажем эти априорные оценки (которые мы не смогли найти в литературе) элементарными рассуждениями.

**ЛЕММА 1.6.** *Для заданного графа  $\Gamma$  и заданных интенсивностей источников  $\{f_\ell\}$  на всяком ребре  $e$  графа  $\Gamma$  решение  $c_e$  соответствующей задачи Кирхгофа с источниками удовлетворяет оценке*

$$|c_e| \leq \frac{1}{2} \sum_{\ell} |f_\ell|, \quad (1.3)$$

*не зависящей от величины сопротивлений  $\underline{\rho} \in \mathbb{R}_+^{\#|E|}$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Мы докажем это утверждение индукцией по числу  $k$  вершин графа  $\Gamma$ . Если  $k = 1$ , то каждое ребро  $e$  представляет собой петлю, так

что  $c_e = 0$  в силу условия (2) (т. е. уравнения (1.2)) в задаче Кирхгофа, и нужное неравенство тривиально. Теперь пусть утверждение выполнено для графов с  $k$  вершинами. Если у графа  $k+1$  вершина, то докажем, что у него найдется такая вершина  $v$ , что  $c_e \geq 0$  для всех ребер  $e \in E_v$ . Действительно, предположим от противного, что такой вершины нет. Тогда выйдем из произвольной вершины графа вдоль выходящего из нее ребра, сила тока на котором отрицательна, войдем в другую вершину и повторим процедуру. В итоге мы когда-нибудь должны вернуться в вершину, через которую мы уже проходили, так что мы построим такой ориентированный цикл из ребер  $\Gamma$ , что  $c_e < 0$  на всяком ребре. Однако все числа  $\rho_{|e|}$  положительные, так что сумма  $\sum c_e \rho_{|e|}$ , взятая по этому циклу, отрицательна. Это противоречит условию (2) в задаче Кирхгофа, так как в нашем случае ЭДС справа нет.

Таким образом, найдется такая вершина  $v \in V(\Gamma)$ , что  $c_e \geq 0$  для всех ребер  $e \in E_v$ . Теперь из условия (1) задачи Кирхгофа в вершине  $v$  (т. е. из равенства (1.1)) следует, что

$$\sum_{e \in E_v} |c_e| = \sum_{e \in E_v} c_e = - \sum_{\ell: p_\ell \in C^v} f_\ell. \tag{1.4}$$

Поскольку сумма интенсивностей всех источников нулевая, то

$$- \sum_{\ell: p_\ell \in C^v} f_\ell = -\frac{1}{2} \left( \sum_{\ell: p_\ell \in C^v} f_\ell - \sum_{\ell: p_\ell \notin C^v} f_\ell \right) \leq \frac{1}{2} \sum_{\ell} |f_\ell|.$$

Значит, неравенство (1.3) выполнено для всех ребер  $e \in E_v$ .

Силы тока  $\{c_e : e \notin E_v\}$  решают задачу Кирхгофа с источниками на графе  $\Gamma'$  с множеством вершин  $V(\Gamma) \setminus v$  и с дополнительными полуребрами, полученными заменой ориентированных ребер  $e \in E_v$  полуребрами, инцидентными  $v(-e)$ , с входящими токами  $c_e$  на них. По предположению индукции для  $\Gamma'$ , для ребер  $e \in \Gamma'$  выполнено неравенство

$$|c_e| \leq \frac{1}{2} \left( \sum_{\ell: p_\ell \notin C^v} |f_\ell| + \sum_{e \in E_v} c_e \right).$$

Объединяя его с равенствами (1.4), получаем оценку (1.3) для всех ребер исходного графа  $\Gamma$ . Лемма доказана.

Оценка решений задачи Кирхгофа с ЭДС следующая.

**ЛЕММА 1.7.** *Для заданного графа  $\Gamma$  и заданной ЭДС  $\mathcal{E}$  на всяком ребре  $e$  графа решение  $c_e$  задачи Кирхгофа с ЭДС с произвольными сопротивлениями  $\underline{\rho} \in \mathbb{R}_+^{\#|E|}$  удовлетворяет оценке*

$$|c_e| \leq \frac{N|\mathcal{E}|}{\min_{|e| \in |E|} \rho_{|e|}}, \tag{1.5}$$

где  $|\mathcal{E}|$  – максимальное значение ЭДС  $\mathcal{E}$  на простых петлях в графе  $\Gamma$ , а  $N$  – ранг группы  $H_1(\Gamma)$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем лемму индукцией по  $N$ . Если  $N = 0$ , то циклов нет и легко видеть, что тогда все силы тока  $c_e$  равны нулю. Для доказательства шага индукции заметим сначала, что по условию (1) в задаче Кирхгофа с ЭДС в отсутствие входящих токов у всякой вершины  $v \in V(\Gamma)$  есть инцидентное ребро  $e_+$ , на котором  $c_{e_+} \geq 0$ . Так же как в предыдущем доказательстве, совершая обход вдоль таких ребер, мы в итоге вернемся в уже пройденную вершину, а как только это случится, мы построим простой ориентированный цикл  $\gamma \subset \Gamma$  с тем свойством, что  $c_{e'} \geq 0$  для всех  $e' \in \gamma$ . Итак, при  $e_0 \in \gamma$  выполнена оценка

$$c_{e_0} \rho_{|e_0|} \leq \sum_{e' \in \gamma} c_{e'} \rho_{|e'|} = \mathcal{E}_\gamma \leq |\mathcal{E}|, \quad (1.6)$$

что сильнее нужной нам оценки (1.3).

Рассмотрим граф  $\Gamma'$ , полученный из  $\Gamma$  разрезанием ребра  $e_0$  и подсоединением к вершинам  $v(e_0)$  и  $v(-e_0)$  новых полуребер, входящие токи на которых равны соответственно  $c_{e_0}$  и  $c_{-e_0}$ . Ограничение на ребра графа  $\Gamma'$  решения задачи Кирхгофа с ЭДС на  $\Gamma$  совпадает с решением  $\tilde{c}_e$  общей задачи Кирхгофа на  $\Gamma'$  с той же ЭДС на всех циклах, не содержащих  $e_0$ , что и раньше, и с указанными входящими токами на двух новых полуребрах. Поскольку решение общей задачи Кирхгофа является линейной комбинацией решений задач с источниками и с ЭДС, имеем  $\tilde{c}_e = c'_e + c''_e$ , где  $c'_e$  и  $c''_e$  – решения соответствующих задач с источниками и с ЭДС. Чтобы оценить  $c'_e$ , мы можем использовать предыдущую лемму, а для  $c''_e$  используем предположение индукции, что дает неравенства

$$|c'_e| \leq c_{e_0}, \quad |c''_e| \leq \frac{(N-1)|\mathcal{E}|}{\min_{|e| \in |E|} \rho_{|e|}}. \quad (1.7)$$

Объединяя их с (1.6), получим нужную оценку (1.5). Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.8. Если все сопротивления  $\rho_{|e|}$  стремятся к бесконечности, то оценка решения задачи с ЭДС стремится к нулю, откуда видно, что предел решений общей задачи Кирхгофа дается решениями соответствующей задачи Кирхгофа с источниками. Именно поэтому в нашей формулировке теоремы 3.7 о пределах ВН-дифференциалов появляется только решение задачи Кирхгофа с источниками, в то время как задача с ЭДС используется при явном построении ВН-дифференциалов в терминах координат вклейки в разделе 6 с помощью поправок к решению задачи Кирхгофа с источниками.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.9. Если  $\underline{c}$  – решение задачи Кирхгофа с источниками, то каждой вершине  $v$  можно приписать электрический потенциал  $V_v \in \mathbb{R}$  так, чтобы на всяком ребре  $e$  был выполнен закон Ома

$$V_{v(e)} = V_{v(-e)} + c_e \rho_{|e|}.$$

На связном графе электрический потенциал определяется однозначно с точностью до аддитивной постоянной, а его существование эквивалентно условию (2) задачи Кирхгофа. Этот потенциал задает полный (нестрогий) порядок на вершинах графа, который естественно назвать хронологическим (что мотивировано конструкцией операторного квантования бозонной струны в работе [15]).

Этот порядок сильно отличается от порядка, рассмотренного в работе [2], и от стратификации по порядку зануления, которую мы введем в определении 8.8 ниже. Хронологический порядок вводит отношение слабого полного порядка на множестве  $C^{(0)}$  ненулевых неприводимых компонент, т. е. на множестве компонент высшего уровня в терминологии работы [2]. Хронологический порядок возникает только при рассмотрении вещественного нормирования, когда все токи вещественные.

Теперь изучим пределы решений задачи Кирхгофа при изменении сопротивлений. Задача Кирхгофа с источниками – это система неоднородных линейных уравнений на силы токов  $\underline{c}$  с коэффициентами  $\underline{\rho}$ , инвариантная относительно  $\mathbb{R}_+$ -масштабирования  $\underline{\rho}$ . Следовательно, решение задачи Кирхгофа с источниками непрерывно зависит от проективизированного набора данных, т. е. от точки пространства  $\mathbb{P}\underline{\rho}$ . Тем самым, для заданной последовательности проективизированных сопротивлений  $\mathbb{P}\underline{\rho}_k$ , сходящейся в пространстве  $S_{>0}^{\#|E|-1}$ , решения задачи Кирхгофа с источниками тоже сходятся. Так как пространство  $S_{>0}^{\#|E|-1}$  некомпактно, нам надо еще понять, когда решения задачи Кирхгофа будут сходиться в ситуации, если последовательность сопротивлений  $\mathbb{P}\underline{\rho}_k$  расходится в  $S_{>0}^{\#|E|-1}$ . Простейшая компактификация этого пространства – это  $S_{\geq 0}^{\#|E|-1}$ , замкнутый октант сферы, в котором все координаты неотрицательны. Однако сходимость  $\mathbb{P}\underline{\rho}_k$  в октанте  $S_{\geq 0}^{\#|E|-1}$  не гарантирует сходимости соответствующих решений задачи Кирхгофа: чтобы это увидеть, заметим, что если на некотором ориентированном цикле из ребер все сопротивления равны нулю, то ко всем токам в этом цикле можно добавить произвольную постоянную. Это показывает, что надо потребовать сходимости сопротивлений в некотором раздутии пространства  $S_{\geq 0}^{\#|E|-1}$ , чтобы обеспечить сходимость решений задачи Кирхгофа с источниками. Требуемое раздутие – это по сути ориентированное вещественное раздутие пересечения неотрицательного сектора вещественной сферы с объединением вещественных координатных плоскостей. За аккуратным определением и обзором свойств ориентированных вещественных раздутий комплексных многообразий мы переадресуем читателя к работе [7]. Для наших целей будет достаточно прямого рекуррентного определения, которое также позволит нам явно выписать аналитические условия сходимости последовательности в раздутом пространстве.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.10.** Через  $S_{\geq 0}^{N-1} := (\mathbb{R}_{\geq 0}^N \setminus \{0\})/\mathbb{R}_+$  обозначим неотрицательный сектор вещественной сферы. *Положительным раздутием сферы  $\mathbb{S}_+^{N-1}$  называется раздутие*

$$\pi: \mathbb{S}_+^{N-1} \rightarrow S_{\geq 0}^{N-1},$$

определенное рекуррентно по  $N$  следующим образом. Мы полагаем, что  $\mathbb{S}_+^0$  – точка. Если при  $0 < j < N$  пространства  $\mathbb{S}_+^j$  определены, то, по определению,  $\mathbb{S}_+^N$  – это результат раздутия каждого координатного подпространства  $\{0\}^j \times S_{>0}^{N-j-1}$  (с точностью до всех возможных перестановок координат) в многообразии  $\mathbb{S}_+^j \times S_{>0}^{N-j-1}$ .

Определенное рекуррентно, пространство  $\mathbb{S}_+^{N-1}$  является несвязным объединением произведений вида  $S_{>0}^{\#P-1} \times \mathbb{S}_+^{N-\#P-1}$ , взятых по всем подмножествам  $P \subset \{1, \dots, N\}$ , где к сфере относятся все ненулевые координаты, а второй сомножитель отвечает за уже определенное раздутие.

Опишем раздутие явно. Для этого обозначим через  $Z_N$  множество разбиений множества  $\{1, \dots, N\}$  на занумерованные подмножества: каждый элемент  $\{P\} \in Z_N$  – это представление

$$\{1, \dots, N\} = P_1 \sqcup \dots \sqcup P_l$$

в виде объединения непересекающихся подмножеств. Тогда пространство  $\mathbb{S}_+^{N-1}$ , как множество, является несвязным объединением произведений положительных секторов сферы по всем разбиениям  $\{P\} \in Z_n$ :

$$\mathbb{S}_+^{N-1} = \bigsqcup_{\{P\} \in Z_N} \prod_{j=1}^l S_{>0}^{N_j-1}, \quad (1.8)$$

где  $N_j := \#P_j$ . Топология на  $\mathbb{S}_+^{N-1}$  такая, что точка

$$\mathbb{P}_\rho = (x_1^{(1)} : \dots : x_{N_1}^{(1)}) \times \dots \times (x_1^{(l)} : \dots : x_{N_l}^{(l)}) \in \prod_{j=1}^l S_{>0}^{N_j-1} \subset \mathbb{S}_+^{N-1}$$

является пределом при  $k \rightarrow \infty$  последовательности точек

$$(y_1[k] : \dots : y_N[k]) \in S_{>0}^{N-1}$$

тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} (y_a[k] x_b^{(j)} - y_b[k] x_a^{(j)}) &= 0 \quad \text{для всех } a, b \in P_j, 1 \leq j \leq l, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{y_a[k]}{y_b[k]} &= 0 \quad \text{для всех } a \in P_j, b \in P_{j'}, 1 \leq j' < j \leq l. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Случай, когда  $l = 1$  и  $P_1 = \{1, \dots, N\}$ , соответствует открытому плотному подмножеству  $S_{>0}^{N-1} \subset \mathbb{S}_+^{N-1}$ . Мы можем определить стягивание

$$\pi : \mathbb{S}_+^{N-1} \rightarrow S_{\geq 0}^{N-1},$$

отображающее  $\mathbb{P}_\rho$  в точку, у которой все координаты  $x_i^{(j)}$  с  $j > 1$  заменены нулями, а все координаты  $x_i^{(1)}$  остались теми же. Тогда  $\pi$  на  $S_{>0}^{N-1}$  оказывается изоморфизмом и  $\mathbb{S}_+^{N-1}$  можно рассматривать как рекуррентное вещественное ориентированное раздутие пространства  $S_{\geq 0}^{N-1}$  (см., к примеру, обсуждение вещественных ориентированных раздутий в [1; разд. X.9]). Можно видеть, что на самом деле  $\mathbb{S}_+^{N-1}$  – вещественное многообразие с углами, но нам важен только тот факт, что  $\mathbb{S}_+^{N-1}$  – компактное топологическое пространство, а  $S_{>0}^{N-1}$  – его плотное открытое подмножество.

Мы теперь докажем, что сходимость сопротивлений в  $\mathbb{S}_+^{\#|E|-1}$  влечет за собой сходимость решений задачи Кирхгофа с источниками и что пределы решений являются решением многомасштабной задачи Кирхгофа, которую мы сейчас определим. Для точки  $\mathbb{P}_\rho \in \mathbb{S}_+^{\#|E|-1}$  пусть

$$x := (x_{i_1} : \dots : x_{i_{\#P_1}}) \in S_{>0}^{\#P_1}$$

– “наибольший сомножитель” в произведении (1.8), соответствующий  $P_1$ , и пусть  $\mathbb{P}_{\rho'} \in \mathbb{S}_+^{\#|E|-\#P_1}$  соответствует произведению остальных сомножителей, так что  $\mathbb{P}_\rho \in \mathbb{S}_+^{\#|E|-1}$  можно рассматривать как

$$x \times \mathbb{P}_{\rho'} \in S_{>0}^{\#P_1} \times \mathbb{S}_+^{\#|E|-\#P_1}.$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.11.** *Многомасштабная задача Кирхгофа* на графе  $\Gamma$  с источниками интенсивности  $\{f_\ell\}$  и обобщенным сопротивлением  $\mathbb{P}_\rho \in \mathbb{S}_+^{\#|E|-1}$  рекуррентно ставится следующим образом.

Пусть  $\Gamma_1$  – граф, полученный из  $\Gamma$  стягиванием всех ребер  $|e| \notin P_1$ . Пусть  $\{c_e\}_{|e| \in P_1}$  – решение задачи Кирхгофа с источниками на графе  $\Gamma_1$  для интенсивностей источников  $f_\ell$  и сопротивлений  $x$ .

Пусть  $\Gamma_2$  – (возможно, несвязный) граф с ребрами  $|e| \in |E|(\Gamma) \setminus P_1$ , вершинами которого являются концевые точки таких ребер, а полуребра которого – это исходные полуребра, инцидентные этим вершинам, и к тому же для каждого ребра такого, что  $|e| \in P_1$  и  $v(e) \in V(\Gamma_2)$ , вводится новое полуребро. Тогда на каждой компоненте связности графа  $\Gamma_2$  ставится многомасштабная задача Кирхгофа с интенсивностями источников  $\{f_\ell\}$  на исходных полуредрах, входящих в  $\Gamma_2$ , с интенсивностями источников  $c_e$  на новых полуредрах и с сопротивлениями  $\mathbb{P}_{\rho'}$  (заметим, что, в силу условия (1) задачи Кирхгофа с источниками на  $\Gamma_1$ , на компонентах связности графа  $\Gamma_2$  суммы интенсивностей источников равны нулю).

*Решением* многомасштабной задачи Кирхгофа с источниками на  $\Gamma$  по определению является пара, состоящая из множества  $\{c_e : |e| \in P_1\}$  и рекуррентно определенного решения многомасштабной задачи Кирхгофа с источниками на каждой компоненте связности графа  $\Gamma_2$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.12.** В терминах стабильных кривых, если  $\Gamma$  – двойственный граф стабильной кривой  $C$ , то  $\Gamma_1$  – это граф кривой, полученной сглаживанием  $C$  во всех нодальных точках, за исключением точек с индексами из  $P_1$ , а  $\Gamma_2$  – граф частичной нормализации во всех нодальных точках, за исключением точек с индексами из  $P_1$ .

Докажем теперь, что если сопротивления сходятся в пространстве  $\mathbb{S}_+^{\#|E|-1}$ , то решения задачи Кирхгофа с источниками сходятся к решению многомасштабной задачи Кирхгофа с источниками.

**ЛЕММА 1.13.** *Для фиксированного графа  $\Gamma$ , если последовательность интенсивностей  $f_{\ell,k}$  сходится к  $f_\ell$ , а у последовательности ненулевых сопротивлений  $\{\rho_k\}$  проективизированные сопротивления  $\mathbb{P}_{\rho_k} \in S_{>0}^{\#|E|-1}$  сходятся*



к точке  $\mathbb{P}\underline{\rho} \in \mathbb{S}_+^{\#|E|-1}$ , то решения  $\underline{c}_k$  задачи Кирхгофа с источниками для сопротивлений  $\underline{\rho}_k$  и интенсивностей источников  $f_{\ell,k}$  сходятся. Более того, предел  $\underline{c}_k$  является решением многомасштабной задачи Кирхгофа с источниками, равными  $f_{\ell}$ , и обобщенным сопротивлением  $\mathbb{P}\underline{\rho}$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Мы докажем лемму индукцией по числу уровней многомасштабной задачи (т.е. по числу  $l$  сомножителей в (1.8)). Если точки  $\mathbb{P}\underline{\rho}_k$  сходятся к  $\mathbb{P}\underline{\rho} \in \mathbb{S}_{>0}^{\#|E|-1}$ , то утверждение очевидно, поскольку задача Кирхгофа с источниками – это просто невырожденная система линейных уравнений и ее решения непрерывно зависят от параметров  $\underline{\rho}_k$  и интенсивностей  $f_{\ell,k}$ .

Пусть теперь  $\pi(\underline{\rho}) = (x, 0)$ , где  $x$  соответствует сомножителю  $P_1$ ; обозначим через  $|x|$  минимум абсолютных значений координат точки  $x$ . Умножив каждый набор  $\underline{\rho}_k$  на подходящее положительное число, можно считать, что точки  $\underline{\rho}_k = (x_k, \underline{\rho}'_k)$  сходятся к  $(x, 0)$ , в то время как  $\mathbb{P}\underline{\rho}_k$  сходятся к  $\mathbb{P}\underline{\rho}$ . Теперь для достаточно больших  $k$  абсолютная величина каждой координаты точки  $x_k$  заведомо ограничена снизу числом  $|x|/2$ , и для всякого  $t > 0$  существует такое достаточно большое  $K$ , что при  $k > K$  каждая компонента набора  $\underline{\rho}'_k$  меньше  $t$  по абсолютной величине. Для фиксированного простого ориентированного цикла  $\gamma \subset \Gamma$  обозначим через  $\gamma_1 \subset \Gamma_1$  цикл, полученный стягиванием в точку ребер, не лежащих в множестве  $P_1$ . Теперь уравнение (2) в задаче Кирхгофа с источниками на  $\Gamma$  выглядит следующим образом:

$$\sum_{e \in \gamma_1} c_{e,k} x_{e,k} + \sum_{e' \in \gamma \setminus \gamma_1} c_{e',k} \rho_{e',k} = 0. \quad (1.10)$$

Пусть  $\{\tilde{c}_{e,k} : e \in E(\Gamma_1)\}$  является решением задачи Кирхгофа с источниками на  $\Gamma_1$  для интенсивностей источников  $f_{\ell,k}$  и сопротивлений  $x_k$ . Тогда из условия (2) в задаче Кирхгофа имеем

$$\sum_{e \in \gamma_1} \tilde{c}_{e,k} x_{e,k} = 0. \quad (1.11)$$

Из (1.10) и (1.11) следует, что

$$\sum_{e \in \gamma_1} (c_{e,k} - \tilde{c}_{e,k}) x_{e,k} = - \sum_{e' \in \gamma \setminus \gamma_1} c_{e',k} \rho_{e',k}. \quad (1.12)$$

Токи  $(c_{e,k} - \tilde{c}_{e,k})$  при  $e \in E(\Gamma_1)$  решают общую задачу Кирхгофа на  $\Gamma_1$  с ЭДС, заданной правой частью в (1.12), и с входящими токами в вершинах  $v \in \Gamma_1$  вида  $v = v(e)$ ,  $|e| \notin P_1$ , равными суммам  $\sum_{e \notin P_1, v(e)=v} c_{e,k}$ . Пусть  $d'_{e,k}$  и  $d''_{e,k}$  – решения соответствующих задач с источниками и с ЭДС. Поскольку

$$|c_{e,k}| \leq \frac{1}{2} \sum_{\ell} |f_{\ell,k}|,$$

из неравенств (1.3) и (1.5) следует существование такой постоянной  $M$ , что для каждого ребра  $e \in E(\Gamma_1)$

$$|c_{e,k} - \tilde{c}_{e,k}| < Mt|x|^{-1}. \quad (1.13)$$

Так как параметр  $t > 0$  может быть произвольным, а других переменных величин справа нет, мы видим, что при  $k \rightarrow \infty$  решения  $c_{e,k}$  и  $\tilde{c}_{e,k}$  на ребрах графа  $\Gamma_1$  имеют один и тот же предел. По предположению индукции решения задачи Кирхгофа на графе  $\Gamma_2$  сходятся к решению многомасштабной задачи на  $\Gamma_2$  с добавочными входящими токами  $\tilde{c}_{e \in \Gamma_1}$ . Лемма доказана.

## 2. Обозначения для ВН-дифференциалов и модулей джет-кривых

Мы будем использовать (в слегка подкорректированной форме, ввиду предстоящей публикации работы [10]) обозначения и постановку задач о ВН-дифференциалах из работ [8], [9], обзор которых приводится ниже.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1.** *Сингулярной частью* мероморфного дифференциала в точке  $p$  на римановой поверхности  $C$  называется класс эквивалентности мероморфных дифференциалов в окрестности  $p$  по отношению эквивалентности  $\omega \sim \omega'$ , означающему, что разность  $\omega' - \omega$  голоморфна в  $p$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2.** Для  $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  через  $\mathcal{M}_{g,n}^{m_1, \dots, m_n}$  обозначим пространство модулей гладких комплексных кривых  $C$  рода  $g$  с  $n$  различными отмеченными точками  $p_1, \dots, p_n$ , где в каждой точке  $p_\ell$  задана сингулярная часть  $\sigma_\ell$  мероморфного дифференциала с полюсом порядка в точности  $m_\ell + 1$ , причем все вычеты  $r_\ell$  чисто мнимые и сумма всех вычетов равна нулю.

Через  $\mathcal{M}_{g,n}^{\leq m_1, \dots, \leq m_n}$  обозначается пространство модулей аналогичных кривых, когда  $\sigma_\ell$  – это сингулярная часть порядка не выше  $m_\ell + 1$  и по крайней мере одна из этих сингулярных частей ненулевая, с тем же условием на вычеты.

Точки пространств  $\mathcal{M}_{g,n}^{m_1, \dots, m_n}$  и  $\mathcal{M}_{g,n}^{\leq m_1, \dots, \leq m_n}$  назовем гладкими *джет-кривыми*.

Джет-кривые будем обозначать через  $X$ , а соответствующие подлежащие гладкие кривые – через  $C$ . В обозначениях для кривых и семейств мы будем для краткости опускать указания на отмеченные точки.

Термин “джет-кривая” связан с тем, что задать сингулярную часть – это то же самое, что задать джет некоторой локальной координаты, в которой мероморфный дифференциал выражается в стандартной форме как  $(z^{-m} + rz^{-1}) dz$ .

Пространства  $\mathcal{M}_{g,n}^{m_1, \dots, m_n} \subset \mathcal{M}_{g,n}^{\leq m_1, \dots, \leq m_n}$  можно рассматривать как расслоения над пространством  $\mathcal{M}_{g,n}$  со слоями

$$\prod_{\ell} (\mathbb{C}^{m_\ell} \setminus \mathbb{C}^{m_\ell-1}) \times \mathbb{R}^{n-1} \quad \text{и} \quad (\mathbb{C}^{\sum m_\ell} \times \mathbb{R}^{n-1}) \setminus \{0, 0\}$$

соответственно.

Из положительной определенности мнимой части матрицы периодов легко следует, что для любой джет-кривой  $X \in \mathcal{M}_{g,n}^{\leq m_1, \dots, \leq m_n}$  существует единственный мероморфный дифференциал

$$\Psi_X \in H^0\left(C, K_C + \sum (m_\ell + 1)p_\ell\right)$$

на соответствующей гладкой кривой с заданными сингулярными частями  $\sigma_\ell$ , с чисто мнимыми вычетами  $r_\ell \in i\mathbb{R}$  в точках  $p_\ell$ , такой, что все его периоды вещественны.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3.** Для произвольной джет-кривой  $X \in \mathcal{M}_{g,n}^{\leq m_1, \dots, \leq m_n}$  назовем  $\Psi = \Psi_X$  ассоциированным *вещественно-нормированным (ВН) дифференциалом*.

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.4.** Задать ВН-дифференциал – то же самое, что с точностью до аддитивной постоянной задать гармоническую функцию

$$F(p) := \text{Im} \int^p \Psi$$

на римановой поверхности с проколами  $C \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$ . Действительно, для такой гармонической функции  $F$  наш ВН-дифференциал определяется выражением  $d(F^* + iF)$ , где  $F^*$  – сопряженная гармоническая функция к  $F$ .

**ОБОЗНАЧЕНИЯ 2.5.** Всюду ниже мы фиксируем числа  $g$ ,  $n$  и  $m_1, \dots, m_n$ , где все  $m_\ell$  неотрицательны, и будем обозначать пространство  $\mathcal{M}_{g,n}^{\leq m_1, \dots, \leq m_n}$  просто через  $\mathcal{M}$ .

Поскольку в компактификации Делиня–Мамфорда отмеченные точки на стабильных нодальных кривых не могут совпадать с нодальными точками, голоморфное расслоение  $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}_{g,n}$  продолжается до голоморфного расслоения над компактификацией Делиня–Мамфорда  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ , которое мы обозначим  $\overline{\mathcal{M}}$ . Назовем кривые  $X \in \overline{\mathcal{M}}$  *стабильными джет-кривыми*.

### 3. Формулировки результатов: пределы ВН-дифференциалов

Наша ближайшая цель – дать точную формулировку теоремы 3.7 о пределах ВН-дифференциалов, т. е. точного варианта теоремы 0.1. Поскольку ВН-дифференциалы не зависят от модулей голоморфно, мы будем работать с последовательностями гладких кривых, вырождающихся в стабильную кривую, а не с алгебраическими семействами гладких кривых, вырождающихся в стабильную кривую.

**ОБОЗНАЧЕНИЯ 3.1.** *Двойственный граф*  $\Gamma$  стабильной кривой

$$(C, p_1, \dots, p_n) \in \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$$

– это граф, чьи вершины  $v$  соответствуют *нормализациям*  $C^v$  неприводимых компонент  $C$ , ребра  $|e|$  соответствуют нодальным точкам  $q_{|e|}$  кривой  $C$ , ориентированные ребра  $e$  соответствуют прообразам  $q_e$  нодальных точек (как точек на нормализации  $\tilde{C}$  кривой  $C$ ), а полуребра  $\ell$  соответствуют отмеченным точкам  $p_\ell$  и инцидентны тем вершинам  $v$ , для которых  $p_\ell \in C^v$ . Таким образом,  $E_v$  – множество всех прообразов нодальных точек на  $C^v$ , а  $q_e$  и  $q_{-e}$  – два прообраза нодальной точки  $q_{|e|}$  кривой  $C$  на  $\tilde{C}$ .

ОБОЗНАЧЕНИЯ 3.2. В дальнейшем мы будем иметь дело с последовательностью  $\{X_k\} \subset \mathcal{M}$  гладких джет-кривых, в которой  $X_k$  сходятся при  $k \rightarrow \infty$  к стабильной джет-кривой  $X \in \partial \overline{\mathcal{M}}$ . Через  $\{C_k\} \subset \mathcal{M}_{g,n}$  обозначим последовательность соответствующих гладких кривых с набором различных отмеченных точек (указания на которые будут опускаться в обозначениях). Следовательно, они сходятся к стабильной кривой  $C \in \partial \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ , соответствующей стабильной джет-кривой  $X$ .

Предел

$$\Psi := \lim_{k \rightarrow \infty} \Psi_{X_k},$$

если он определен, назовем *предельным ВН-дифференциалом* такой последовательности. Мы также позволим себе говорить об особенностях дифференциалов в точках  $p_\ell \in C_k$ , не указывая, что сами точки  $p_\ell$  зависят от  $k$ . Мы будем использовать обозначение  $\Psi_k$  вместо  $\Psi_{X_k}$ .

Если для рассматриваемой поверхности существует предельный ВН-дифференциал  $\Psi$ , то

$$\Psi \in H^0\left(C, \omega_C\left(\sum (m_\ell + 1)p_\ell\right)\right).$$

Иными словами, у дифференциала  $\Psi$  имеются предписанные особенности в каждой точке  $p_\ell \in C$  и не более чем простые полюсы в нодальных точках  $C$ , вычеты в которых противоположны. Мы позволим себе обозначать через  $\Psi^v$  поднятие на нормализацию  $\tilde{C}^v$  ограничения  $\Psi$  на соответствующую неприводимую компоненту  $C^v \subset C$ . Таким образом, каждый дифференциал  $\Psi^v$  однозначно определен своими вычетами в точках  $q_e$ , где  $e \in E_v$ , и своими сингулярными частями в точках  $p_\ell$ , попадающих на  $C^v$ .

В [8; разд. 5] мы показали, что у ВН-дифференциалов, единственной особенностью которых является один полюс второго порядка, пределы не могут иметь вычетов в нодальных точках стабильной кривой. Это доказательство дословно переносится на ВН-дифференциалы, имеющие единственный полюс произвольного порядка, и по  $\mathbb{R}$ -линейности (зависимости ВН-дифференциала от сингулярных частей) распространяется на общий случай произвольного дифференциала с нулевыми вычетами, т. е. дифференциала “второго рода” в классической терминологии. Мы приходим к следующему результату.

**ТЕОРЕМА 3.3** [8]. *Если все вычеты  $r_\ell(X_k)$  равны нулю, то предельный ВН-дифференциал  $\Psi$  существует для любой вырождающейся последовательности  $\{X_k\} \rightarrow X$ , причем ограничение  $\Psi^v$  на всякую компоненту  $C^v$  предельного ВН-дифференциала является ВН-дифференциалом на  $C^v$  с предписанными сингулярными частями в отмеченных точках  $p_\ell$ , оказавшихся на  $C^v$ , и не имеющих других особенностей, даже в нодальных точках.*

**ЗАМЕЧАНИЕ 3.4.** Априори этот результат кажется удивительным, поскольку из него, к примеру, следует, что предельный ВН-дифференциал второго рода тождественно равен нулю на компонентах  $C^v$ , не содержащих отмеченных точек. Понятно, что в общей ситуации с ненулевыми вычетами  $r_\ell$  это не

так, что видно уже в случае  $n = 2$  с двумя простыми полюсами на разных компонентах стабильной кривой: в нодальной точке “между” этими компонентами по теореме о вычетах должен появиться простой полюс.

Что касается пределов ВН-дифференциалов “третьего рода” с произвольными вычетами  $r_\ell$ , то легко видеть, что вычеты предельных ВН-дифференциалов могут зависеть от вырождающейся последовательности, и основная наша теорема о предельных ВН-дифференциалах дает необходимое условие существования предельного ВН-дифференциала, а также описывает его вычеты. Для замыканий стратов, рассматриваемых в работах [6], [4], [5], [2], в литературе нет описаний подобной явной конструкции.

Мы проводим рассуждения в координатах вклейки вблизи границы пространства модулей; мы напомним их определение и обсудим их в разделе 4. Для формулировки результатов напомним, что параметр вклейки  $s_{|e|}$  соответствует локальной переклейке окрестности нодальной точки  $q_{|e|} \in C$ . Если ее сингулярная окрестность задана уравнением  $xy = 0$  в локальных координатах, то мы заменяем ее на окрестность вида  $xy = s_{|e|}$ . Совокупность всех параметров вклейки для каждой нодальной точки  $C$ , вместе с любыми выбранными координатами для пространства модулей кривых, содержащего класс кривой  $[\tilde{C}]$ , задают локальные координаты вблизи граничной точки  $C$  пространства  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ . Поскольку  $\overline{\mathcal{M}}$  – расслоение над  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ , локальные координаты вблизи точки  $X \in \partial\overline{\mathcal{M}}$  даются локальными координатами на пространстве  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$  вблизи  $C$  и локальными координатами на слое расслоения  $\overline{\mathcal{M}} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.5.** *Log-координатами вклейки* гладкой точки  $C'$ , лежащей в окрестности точки  $C \in \partial\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ , называется точка

$$\underline{\rho}(C') := \{-\log |s_{|e|}|\} \in \mathbb{R}_+^{\#|E|}.$$

*Проективизированными log-координатами вклейки* точки  $C'$  называется точка

$$\mathbb{P}\underline{\rho}(C') \in \mathbb{R}_+^{\#|E|} / \mathbb{R}_+ = \mathbb{S}_{>0}^{\#|E|-1}.$$

Как доказано в разделе 1, сходимость проективизированных сопротивлений в раздутии  $\mathbb{S}_+^{\#|E|-1}$  неотрицательного сектора  $\mathbb{S}_{\geq 0}^{\#|E|-1}$  влечет за собой сходимость решений задачи Кирхгофа с источниками.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.6.** Последовательность  $\{C_k\} \subset \mathcal{M}_{g,n}$ , сходящаяся к кривой  $C \in \partial\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ , называют *допустимой*, если у проективизированных log-координат вклейки  $\mathbb{P}\underline{\rho}(C_k)$  кривых  $C_k$  есть предел

$$\mathbb{P}\underline{\rho} := \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}\underline{\rho}(C_k) \in \mathbb{S}_+^{\#|E|-1} \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

В этом случае точку  $\mathbb{P}\underline{\rho}$  называют *скоростями вырождения* последовательности  $\{C_k\}$ .

Наш центральный результат о предельных ВН-дифференциалах заключается в том, что их вычеты даются пределами решений задачи Кирхгофа с источниками, которые в силу леммы 1.13 являются решениями соответствующей многомасштабной задачи Кирхгофа.

**ТЕОРЕМА 3.7.** Пусть  $\{X_k\} \subset \mathcal{M}$  – последовательность гладких джет-кривых, сходящаяся к стабильной джет-кривой  $X$ . Тогда предельный ВН-дифференциал  $\Psi = \lim_{k \rightarrow \infty} \Psi_{X_k}$  определен в том и только том случае, когда сходятся решения  $c_{e,k}$  задачи Кирхгофа с источниками интенсивностей  $ir_{\ell,k}$  и сопротивлений  $\rho_k$ . Если предельный ВН-дифференциал определен, то на каждой компоненте  $C^v$  соответствующий предел  $\Psi^v$  является ВН-дифференциалом с заданными особенностями в отмеченных точках  $r_\ell$ , оказавшихся на  $C^v$ , и с простыми полюсами в nodальных точках с вычетами, равными  $i$ , умноженному на предел решений задачи Кирхгофа с источниками.

Эта теорема будет доказана в разделе 7. В силу анализа пределов решений задачи Кирхгофа, проведенного в разделе 1, лемма 1.13 влечет следующее.

**СЛЕДСТВИЕ 3.8.** Если  $\{X_k\}$  – допустимая последовательность со скоростями вырождения  $\mathbb{P}\underline{\rho} \in \mathbb{S}_+^{\#|E|-1}$ , то предельный ВН-дифференциал  $\Psi$  существует и для всех  $e \in E_v$  его вычеты даны решением многомасштабной задачи Кирхгофа с обобщенными сопротивлениями  $\mathbb{P}\underline{\rho}$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 3.9.** В случае предельных дифференциалов второго рода все интенсивности  $f_\ell$  равны нулю, так что, каковы бы ни были сопротивления  $\mathbb{P}\underline{\rho}_k$ , семейство нулевых токов  $c_e = 0$  будет единственным решением задачи Кирхгофа с источниками. Значит, для всякой последовательности эти решения сходятся, и в пределе силы тока также равны нулю. В частности, в этом случае предел по всем допустимым последовательностям один и тот же. На самом деле, при том, что сходимое сопротивление в пространстве  $\mathbb{S}_+^{\#|E|-1}$  влечет за собой сходимость решений задачи Кирхгофа, возникающие пределы вполне могут оказаться одними и теми же. Мы не утверждаем, что  $\mathbb{S}_+^{\#|E|-1}$  – это минимальное раздутие сектора  $\mathbb{S}_{\geq 0}^{\#|E|-1}$ , на которое непрерывно продолжаются решения задачи Кирхгофа с источниками.

**ЗАМЕЧАНИЕ 3.10.** Частный случай этой теоремы, когда у кривой  $C$  геометрический род равен нулю (т. е. каждая компонента  $C^v$  является рациональной кривой), а набор скоростей вырождения лежит в  $\mathbb{S}_{> 0}^{\#|E|-1}$  (так что раздувать  $\mathbb{S}_+^{\#|E|-1}$  не нужно), изучался Ленгом [16], который доказал вариант нашей теоремы для этого случая с совершенно других позиций и весьма отличающимися методами.

**ЗАМЕЧАНИЕ 3.11.** Для вырождающихся алгебраических 1-параметрических семейств, рассмотренных в [2], каждая из координат вклейки  $s_e$  имеет вид  $t^{n_e}$  для некоторого целого  $n_e > 0$ , так что в таком семействе любая подпоследовательность допустима, а набор ее скоростей вырождения равен  $\mathbb{P}\underline{n} \in \mathbb{S}_{> 0}^{\#|E|-1}$ . В частности, в случае такого алгебраического семейства сферу раздувать не надо.

**ЗАМЕЧАНИЕ 3.12.** В терминах дифференциалов условие (1) в задаче Кирхгофа имеет понятный смысл: оно гарантирует, что теорема о вычетах выполняется для каждого дифференциала  $\Psi^v$ . Условие (2) не настолько прозрачно. На самом деле, если бы у набора ВН-дифференциалов  $\Psi$  на компонентах  $C^v$  были произвольные вычеты в нодальных точках, то, как показывают наши вычисления в лемме 6.5, мнимые части его периодов по циклам, проходящим через нодальные точки, содержали бы логарифмические расходимости. Условие (2) как раз и гарантирует, что логарифмические расходимости взаимно сокращаются, так что мнимые части периодов предельного ВН-дифференциала на стабильной сингулярной кривой  $C$  конечны.

Поскольку пространство  $\mathbb{S}_+^{\#|E|-1}$  компактно, все возможные предельные ВН-дифференциалы на  $C$  получаются таким образом.

**ЛЕММА 3.13.** *Любая последовательность гладких джет-кривых  $\{X_k\}$ , сходящаяся к стабильной джет-кривой  $X \in \partial\overline{\mathcal{M}}$ , содержит допустимую подпоследовательность.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пространство  $\mathbb{S}_+^{\#|E|-1}$  компактно, так что у последовательности  $\{\mathbb{P}\rho(C_k)\} \subset \mathbb{S}_+^{\#|E|-1}$  должна быть сходящаяся подпоследовательность, которая по определению соответствует допустимой последовательности гладких кривых.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.14.** *Пусть последовательность гладких джет-кривых  $\{X_k\} \subset \mathcal{M}$  сходится к стабильной джет-кривой  $X$ . Если существует предельный ВН-дифференциал, то он является набором ВН-дифференциалов на компонентах  $C^v$  с предписанными особенностями в точках  $p_i$  и с вычетами в точках  $q_e$ , равными умноженному на  $i$  решению многомасштабной задачи Кирхгофа для некоторого обобщенного сопротивления  $\mathbb{P}\rho \in \mathbb{S}_+^{\#|E|-1}$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** По лемме 3.13 последовательность  $\{X_k\}$  содержит допустимую подпоследовательность, по которой сопротивления сходятся к некоторой точке  $\mathbb{P}\rho \in \mathbb{S}_+^{\#|E|-1}$ . В силу леммы 1.13 решения задачи Кирхгофа с источниками имеют предел по такой подпоследовательности, который задается решением многомасштабной задачи Кирхгофа с сопротивлениями  $\mathbb{P}\rho$ . Наконец, по теореме 3.7 из сходимости решений задачи Кирхгофа с источниками следует существование предельного ВН-дифференциала нужной формы по этой последовательности. Поскольку по предположению предельный ВН-дифференциал существует по всей исходной последовательности, он должен иметь нужную форму. Предложение доказано.

Это завершает изложение наших результатов по пределам ВН-дифференциалов. Мы приведем детали и формулировки результатов по пределам нулей ВН-дифференциалов в разделе 8, после того как введем основной технический инструментарий для решения задачи о скачках.



#### 4. Конструкция вклейки для римановых поверхностей

Теперь напомним детали конструкции вклейки (plumbing), обсуждавшейся во введении, и зафиксируем обозначения, используемые далее в тексте и во всех доказательствах.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1** (стандартная вклейка). Пусть  $q_1, q_2 \in C$  (где  $C$  – не обязательно связная риманова поверхность) – различные точки. Пусть  $z_1, z_2$  – локальные координаты на  $C$  вблизи  $q_1, q_2$ , в которых  $z_j(q_j) = 0$ . Выберем их так, чтобы обратные отображения  $z_j^{-1}$  вкладывали единичный круг из комплексной плоскости в поверхность как непересекающиеся окрестности  $V_j := \{|z_j| < 1\} \subset C$  точек  $q_j$ . Для всякого числа  $s \in \mathbb{C}$  абсолютной величины  $|s| < 1$  обозначим

$$U_j = U_j^s := \{|z_j| < \sqrt{|s|}\} \subset V_j$$

круги соответствующего радиуса, а через

$$\gamma_j := \partial U_j$$

обозначим их граничные окружности, отрицательно ориентированные относительно  $U_j$ . *Стандартной вклейкой с параметром  $s$*  называется риманова поверхность

$$C_s := [C \setminus (U_1 \sqcup U_2)] / (\gamma_1 \sim \gamma_2),$$

где кривая  $\gamma_1$  отождествляется с  $\gamma_2$  диффеоморфизмом  $I(z_1) := s/z_1$ . Структура римановой поверхности  $C_s$  задается следующим образом: функция на  $C_s$  голоморфна, если она голоморфна на дополнении ко шву  $\gamma$  (образу  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ ) и непрерывна на этом шве.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2** (координаты вклейки на пространстве модулей). В окрестности стабильной кривой  $C \in \partial \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$  локальные координаты вклейки на  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$  задаются следующим образом. Пусть  $\tilde{C}$  – нормализация  $C$ , т.е. гладкая (не обязательно связная) риманова поверхность, на которой отмечены точки  $p_\ell$ , а также все прообразы нодальных точек.

Будем считать  $\tilde{C}$  точкой декартова произведения пространств модулей кривых с отмеченными точками, соответствующих связным компонентам  $\tilde{C}$ . Пусть  $u = (u_1, \dots, u_x)$  – локальная система координат на этом произведении; обозначим  $\tilde{C}_u$  кривую (не обязательно связную) из этого пространства с координатами  $u$ , так что у кривой  $\tilde{C}$  координаты  $u_i$  равны 0. Для достаточно малых значений параметра  $u$  выберем голоморфное по параметру семейство локальных координат  $z_e$  в окрестности (на  $\tilde{C}_u$ ) каждого прообраза  $q_e$  каждой нодальной точки кривой  $C_u$ , промасштабированные так, чтобы единичные круги в этих координатах не пересекались на  $\tilde{C}_u$ .

Теперь координаты  $u$ , вместе с набором параметров вклейки

$$\underline{s} := \{s_{|e|}\} \in \Delta^{\#|E|},$$

где  $\Delta \subset \mathbb{C}$  – достаточно малый круг, образуют локальную систему координат на  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$  в окрестности  $C$  (см. [3]).

ЗАМЕЧАНИЕ 4.3. В литературе можно найти различные варианты вклейки. Обычно рассматриваются окрестности вида  $V_j = \{|z_j| < \varepsilon\}$  в локальных координатах, где  $\varepsilon$  достаточно мало; разумеется, после умножения  $z_j$  на вещественное число это оказывается эквивалентным нашей постановке.

Наш вариант вклейки путем непосредственного отождествления границ двух выброшенных кругов, вероятно, появился первым и восходит к работе [3]. Легко видеть, что это эквивалентно удалению замкнутых кругов радиуса  $|s|$  с центрами в  $q_j$  и отождествлению двух колец вдоль границы получившейся римановой поверхности: отождествить кольца – это то же самое, что разрезать склеенную поверхность вдоль срединной окружности итогового склеенного кольца и использовать нашу конструкцию.

В работах [1], [21], [2] используется вклейка с дополнительной фиксированной трубкой, являющаяся аналитическим описанием системы координат алгебраической версальной деформации. Легко видеть, что этот третий вариант вклейки также эквивалентен первоначальному варианту, используемому нами: достаточно разрезать трубку  $xy = t$  вдоль окружности  $|x| = |y|$ . Преимущество подхода, использующего стандартную трубку, заключается в том, что мы можем проследить за алгебраической структурой семейства римановых поверхностей, вырождающегося в нодальную точку, и можем интерпретировать координаты вклейки как версальные деформации нодальной кривой.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.4. Наш вариант вклейки лучше всего подходит для анализа пределов 1-форм при вырождении поверхности. Действительно, если в нашей постановке  $\{C_k\}$  – это последовательность гладких римановых поверхностей, сходящаяся к  $C$ , то каждая кривая  $C_k$  получается отождествлением граничных компонент некоторого подмножества  $C$ . Значит, любую последовательность мероморфных дифференциалов  $\Phi_k$  на  $C_k$  можно интерпретировать как последовательность дифференциалов, определенных на последовательности увеличивающихся подмножеств  $C$ , сходящихся ко всей  $C$  при  $k \rightarrow \infty$ . Так что если предел  $\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_k$  определен, то он автоматически оказывается набором мероморфных дифференциалов  $\Phi^v$  на неприводимых компонентах  $C^v$  кривой  $C$ .

Для краткости обозначим через  $\tilde{C} := \tilde{C}_{u,0}$  нормализацию нодальной кривой и будем систематически опускать индекс  $u$ , если это не приводит к путанице. Представим  $\tilde{C}$  как объединение ее связных компонент, занумерованных вершинами  $v \in V(\Gamma)$  двойственного графа  $\Gamma$  кривой  $C$ :

$$\tilde{C} = \bigcup C^v.$$

Напомним, что  $e$  обозначает *ориентированное* ребро  $\Gamma$ , а  $|e|$  – неориентированное ребро. Через

$$q_e \in C^{v(e)}, \quad v(e) := \text{target}(e),$$

мы обозначим соответствующий прообраз нодальной точки  $q_{|e|} = q_e \sim q_{-e}$  на кривой  $C$ . Для упрощения обозначений также положим  $s_e = s_{-e} = s_{|e|}$ . Теперь  $\hat{C}_{\underline{s}}$  будет обозначать замкнутую риманову поверхность с краем, полученную

удалением из  $\tilde{C}$  открытых кружков  $U_e^{s_e}$ :

$$\hat{C}_{\underline{s}} := \tilde{C} \setminus \bigcup_e U_e^{s_e}.$$

Если для каждого ребра  $|e| \in |E|(\Gamma)$  отождествить граничные кривые  $\gamma_e^{s_e}$  и  $\gamma_{-e}^{s_e}$  поверхности  $\hat{C}_{\underline{s}}$  с помощью отображения  $I_e$ , переводящего  $z_e$  в  $s_e/z_e$ , получается как раз риманова поверхность с вклейкой  $C_{u,\underline{s}}$ . Говоря об 1-форме  $\omega$  на  $\tilde{C}$  или  $\hat{C}$ , мы будем иметь в виду набор 1-форм  $\omega^v$  на наборе компонент связности кривой  $\tilde{C}$  или  $\hat{C}$ .

Поскольку  $\overline{\mathcal{M}}$  представляет собой пространство расслоения над  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ , вблизи точки  $X \in \partial \overline{\mathcal{M}}$  локальные координаты на  $\overline{\mathcal{M}}$  даются парой  $u, \underline{s}$  в совокупности с некоторой локальной системой координат  $w$  на слое расслоения. В этих координатах стабильная джет-кривая обозначается  $X_{w,u,\underline{s}}$ , а соответствующая стабильная кривая обозначается  $C_{u,\underline{s}}$ .

Мероморфный дифференциал  $\Phi$  на  $\hat{C}_{\underline{s}}$  (напомним, что так обозначается набор мероморфных дифференциалов  $\Phi^v$  на  $\hat{C}_{\underline{s}}^v$ ) склеивается в мероморфный дифференциал на  $C_{\underline{s}}$  тогда и только тогда, когда для всех ребер  $e$

$$\Phi^{v(e)}|_{\gamma_e} = I_e^*(\Phi^{v(-e)}|_{\gamma_{-e}}). \tag{4.1}$$

**ЗАМЕЧАНИЕ 4.5.** Разумеется, не каждый дифференциал  $\Phi$  на  $\hat{C}_{\underline{s}}$  удовлетворяет (4.1) и склеивается в дифференциал на  $C_{\underline{s}}$ . Стандартная ситуация – это когда имеются дифференциалы с простыми полюсами в прообразах нодальных точек, с противоположными вычетами в этих полюсах. Выбрав локальные координаты  $z_e$  вблизи  $q_e$ , в которых  $\Phi^{v(e)} = a_e dz_e/z_e$ , где  $a_e = -a_{-e}$ , и проведя вклейку в этих координатах, мы получаем склеенный дифференциал на  $C_{\underline{s}}$ . В более общей ситуации можно выбрать стандартные координаты, ассоциированные с дифференциалом, и подклеить нуль порядка  $k$  к полюсу порядка  $k+2$  с нулевым вычетом, что было предложено и реализовано в работах [6], [4], [2]. В результате, после серьезных дополнительных усилий в том случае, когда возникают ненулевые вычеты, мы построим мероморфный дифференциал на гладкой римановой поверхности  $C_{\underline{s}}$ , лежащей в координатах вклейки вблизи  $C$ . Однако такие локальные координатные функции  $z_e$  зависят от дифференциала и поэтому будет сложно доказать, что таким образом можно получить все дифференциалы подходящего вида на близлежащих римановых поверхностях.

Мы используем непосредственный аналитический подход, начав с произвольного фиксированного набора локальных координат  $z_e$  в окрестности точек  $q_e$  (для любых координат  $u$ ) и тем самым с фиксированной системы координат вклейки на пространстве модулей. Для любого дифференциала  $\Phi$  на  $\hat{C}_{\underline{s}}$  мы вычтем из него другой дифференциал  $\omega$  на  $\hat{C}_{\underline{s}}$  так, чтобы их разность удовлетворяла (4.1) и тем самым задавала дифференциал на  $C_{\underline{s}}$ . Нашим требованием к  $\omega$  будет, чтобы его “скачки” на  $\gamma_e$  совпали со скачками  $\Phi$ . Мы построим  $\omega$ , решая задачу о скачках в явном виде.

## 5. Задача о скачках

Для компактной римановой поверхности с фиксированным на ней набором петель задача о скачках заключается в построении голоморфного дифференциала в дополнении к этим петлям, который непрерывно продолжается на каждую петлю с обеих сторон, причем его граничные значения на петле отличаются на заданный скачок. Эквивалентным образом, можно считать, что задача ставится на римановой поверхности с краем, у которой компоненты края попарно отождествлены, а решением задачи о скачках будет дифференциал, определенный во внутренних точках поверхности и непрерывно продолжающийся на край, разности граничных значений которого равны заданным “скачкам”. Обзор классических подходов к решению задачи о скачках дан в работе [22] и подробно разъяснен в [19]. Задача о скачках решается интегрированием скачков с ядром Коши, определенным на рассматриваемой римановой поверхности.

Нас интересует построение ВН-дифференциалов в координатах вклейки и, следовательно, решение задачи о скачках на  $C_{\underline{s}}$ . Поскольку ядро Коши на  $C_{\underline{s}}$  зависит от  $\underline{s}$ , проследить за поведением решения задачи о скачках в процессе вырождения при  $\underline{s} \rightarrow 0$  трудно, и в литературе такой анализ не проводился. Вместо этого мы рассматриваем ядро Коши на нормализации  $\tilde{C}$  нодальной кривой и строим с его помощью дифференциалы на  $\tilde{C}$  с предписанными скачками на швах, трактуемых как замкнутые петли на  $\tilde{C}$ . Эффективно контролируя поведение построенных решений задачи о скачках в малых окрестностях нодальных точек, мы подправляем это решение рекуррентным образом, что в конечном итоге дает нам нужное решение задачи о скачках на  $C_{\underline{s}}$ . Поскольку мы пользуемся только ядром Коши на  $\tilde{C}$ , не зависящим от  $\underline{s}$ , за поведением решения при вырождении можно проследить. В настоящей статье мы сосредоточены на решении задачи о скачках для построения ВН-дифференциалов. В дальнейшем К. Ху и третий автор использовали наш метод в работе [11] для изучения нормированного базиса дифференциалов. Это оказалось проще, поскольку можно было воспользоваться голоморфной зависимостью от параметров.

В этом разделе мы будем иметь дело только с гладкими джет-кривыми, так что все параметры  $s_e$  предполагаются ненулевыми. Для удобства введем обозначение

$$|\underline{s}| := \max_e |s_e|.$$

Задача о скачках – это аддитивный аналог мультипликативной задачи Римана–Гильберта на римановой поверхности  $\hat{C}_{u,\underline{s}}$  с краем из  $\#E$  компонент. Начальные данные в ней – это набор  $\phi$  гладких комплекснозначных 1-форм  $\phi_e$  на  $\gamma_e$ , которые мы называем *скачками*. Скачки удовлетворяют равенствам

$$\phi_e = -I_e^*(\phi_{-e}) \quad \text{и} \quad \int_{\gamma_e} \phi_e = 0 \quad \text{для любого } e \in E.$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1.** В задаче о скачках требуется найти голоморфную 1-форму  $\omega$ , определенную во внутренних точках  $\hat{C}_{u,\underline{s}}$  и непрерывно продолжающуюся на компоненты  $\gamma_e$  края  $\hat{C}_{u,\underline{s}}$ , причем эти продолжения должны делать

скачки  $\phi_e$ , т. е. для каждого  $e$  должно выполняться равенство

$$\omega|_{\gamma_e} - I_e^*(\omega|_{\gamma_{-e}}) = \phi_e.$$

Эквивалентным образом, в задаче о скачках надо построить дифференциалы на  $C_{u,\underline{s}}$ , которые непрерывны вне швов  $\gamma_{|e|}$  и имеют предписанные разности граничных значений с двух сторон от каждого шва.

Решение задачи о скачках никогда не единственно: произвольный голоморфный дифференциал на  $C_{u,\underline{s}}$  имеет поднятие с нулевыми скачками на кривую  $\widehat{C}_{u,\underline{s}}$ , так что его можно добавить к решению и получить другое решение. Основным нашим инструментом будет явная конструкция подходящим образом нормированного решения, называемого почти ВН-решением, и явные оценки для этого решения.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2.** *Существует такая постоянная  $t$ , не зависящая от координаты  $u$ , что для любого числа  $|\underline{s}| < t$  и любого набора  $\underline{\phi}$  задача о скачках имеет единственное решение  $\omega$  на  $\widehat{C}_{u,\underline{s}}$ , обладающее следующими свойствами:*

- (a)  $\int_{\gamma_e} \omega = 0$  для любой подальней точки  $e$ ;
- (b)  $\int_{\gamma} \omega \in \mathbb{R}$  для любого цикла  $\gamma \in H_1(\widetilde{C}_u, \mathbb{Z})$ .

Решение  $\omega$  явно выражается суммой  $\xi + \chi$ , где  $\xi$  и  $\chi$  – ограничения на  $\widehat{C}_{u,\underline{s}}$  интегралов вида (5.7) и (5.18), в которых гладкие вещественные 1-формы  $h_e, g_e$  на  $\gamma_e$  определены как суммы рядов с членами вида (5.26).

Мы будем называть такое решение  $\omega$  почти вещественно-нормированным (почти ВН) решением задачи о скачках. Заметим, что условие (b) на  $\gamma$  эквивалентно выбору цикла  $\gamma \in H_1(C_{u,\underline{s}}, \mathbb{Z})$ , не пересекающего швов.

Это утверждение замечательно явной конструкцией, которая в итоге позволит нам дать оценки почти ВН-решения при вырождении кривой.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Доказательство предложения занимает большую часть раздела.

1) *Единственность почти ВН-решения.* Предположим, что у задачи о скачках есть два почти ВН-решения  $\omega_1$  и  $\omega_2$  для одних и тех же начальных данных. Тогда у формы  $\omega := \omega_1 - \omega_2$  нулевые скачки и она является голоморфной 1-формой на  $C_{u,\underline{s}}$  с нулевыми интегралами по швам  $\gamma_e$  и с вещественными интегралами по путям, лежащим в  $\widehat{C}_{u,\underline{s}}^v$ .

Чтобы показать, что  $\omega$  – тождественный нуль, применим теорему Стокса на каждой компоненте  $\widehat{C}_{u,\underline{s}}^v$  и просуммируем результаты по всем компонентам (мы будем использовать аналогичный прием и в дальнейшем). Выберем про-

извольную точку  $p_0 \in C^v$ ; тогда

$$F^v(p) := \operatorname{Im} \int_{p_0}^p \omega|_{C^v}$$

– однозначная вещественная гармоническая функция на  $\widehat{C}_{u,\underline{s}}^v$ , поскольку у формы  $\omega^v$  вещественные периоды. Спряженная гармоническая функция

$$F^{v*}(p) = \operatorname{Re} \int_{p_0}^p \omega$$

многозначна, но определена локально однозначно с точностью до аддитивной постоянной, так что определение  $\omega^v = dF^{v*} + i dF^v$  корректно. Оценим  $L^2$ -норму  $\omega^v$  на  $C^v$  по теореме Стокса:

$$\begin{aligned} \frac{i}{2} \int_{\widehat{C}_{u,\underline{s}}^v} \omega^v \wedge \bar{\omega}^v &= \frac{i}{2} \int_{\widehat{C}_{u,\underline{s}}^v} (dF^{v*} + i dF^v) \wedge (dF^{v*} - i dF^v) \\ &= \int_{\widehat{C}_{u,\underline{s}}^v} dF^{v*} \wedge dF^v = - \sum_{e \in E_v} \int_{\gamma_e} F^v dF^{v*}, \end{aligned} \quad (5.1)$$

где мы использовали тот факт, что  $F^v$  – корректно определенная однозначная функция на  $\widehat{C}_{u,\underline{s}}^v$  а край  $\widehat{C}_{u,\underline{s}}^v$  – набор кривых  $\gamma_e$ , где  $e \in E_v$ .

Просуммируем эти равенства по всем  $v$ ; слагаемые справа группируются по парам  $\{e, -e\}$ . Поскольку  $\omega$  – голоморфный дифференциал на заклеенной поверхности  $C_{u,\underline{s}}$ , на каждом шве ограничения функций  $F^{v(e)}|_{\gamma_e}$  и  $I_e^*(F^{v(-e)}|_{\gamma_{-e}})$  отличаются на константу интегрирования  $C_e$ , а ограничения дифференциалов  $dF^{v(e)*}|_{\gamma_e}$  и  $dF^{v(-e)*}|_{\gamma_{-e}}$  переводятся отображением  $I_e$  одно в другое. Таким образом,

$$\int_{\gamma_e} F^{v(e)} dF^{v(e)*} + \int_{\gamma_{-e}} F^{v(-e)} dF^{v(-e)*} = C_e \int_{\gamma_e} dF^{v(e)*},$$

где, напомним, отображение  $I_e: \gamma_e \rightarrow \gamma_{-e}$  обращает ориентацию. Поскольку  $\int_{\gamma_e} \omega^{v(e)} = 0$  по определению почти ВН-решения, мы также имеем

$$\int_{\gamma_e} dF^{v(e)*} = 0,$$

так что сумма слагаемых вида (5.1) по всем  $v$  обращается в нуль. В итоге имеем:

$$\int_{C_{u,\underline{s}}} \omega \wedge \bar{\omega} = 0,$$

так что форма  $\omega$  тождественно равна нулю.

2) *Построение почти ВН-решения.* Сначала мы напомним понятие ядра Коши, а потом используем его подходящую версию для работы с вещественной и мнимой частями начальных данных. После этого мы построим почти ВН-решение, явно выписав обратный оператор к возникающему интегральному оператору в виде суммы сходящегося ряда.

3) *Ядра Коши*. Напомним, что для компактной римановой поверхности  $\mathcal{C}$  рода  $g$  и симплектического базиса  $\{A_k, B_k\}$  в гомологиях  $H_1(\mathcal{C}, \mathbb{Z})$  нормированный базис в пространстве голоморфных дифференциалов на  $\mathcal{C}$  задается условием

$$\int_{A_k} \omega_j = \delta_{j,k}.$$

Пусть  $\tau_{j,k} = \int_{B_k} \omega_j$  обозначает матрицу периодов  $\mathcal{C}$ , а  $\theta(z) = \theta(\tau, z)$  – соответствующую тета-функцию. Обозначим  $A$  отображение Абеля–Якоби кривой  $\mathcal{C}$  в пространство  $\mathbb{C}^g$ , переводящее точку  $q_0$  в начало координат, и пусть  $\kappa$  – соответствующая константа Римана. Тогда для достаточно общего набора из  $g$  фиксированных точек  $q_0, \dots, q_{g-1} \in \mathcal{C}$  *нормированное ядро Коши* задается формулой

$$K_{\mathcal{C}}(p, q) := \frac{1}{2\pi i} d_p \log \frac{\theta(A(p) - A(q) - Z)}{\theta(A(p) - Z)}, \quad (5.2)$$

где

$$Z := \sum_{j=1}^{g-1} A(q_j) + \kappa$$

и  $d_p$  обозначает внешний дифференциал по переменной  $p$  при фиксированной точке  $q$ . Легко проверить, что  $K_{\mathcal{C}}$  является мероморфным дифференциалом по переменной  $p$  с простыми полюсами при  $p = q$  и  $p = q_0$  и с вычетами  $\pm(2\pi i)^{-1}$  в этих полюсах. Если  $p$  фиксировано, то  $K_{\mathcal{C}}$  является многозначной мероморфной функцией  $q$  с единственным полюсом в точке  $q = p$ .

Ядро Коши  $K_{\mathcal{C}}$  нормировано в том смысле, что все его  $A$ -периоды равны нулю:

$$\int_{p \in A_k} K_{\mathcal{C}}(p, q) = 0.$$

На сфере ядро Коши имеет простой вид

$$K_{\mathbb{P}^1}(p, q) = \frac{1}{2\pi i} \frac{dp}{p - q}.$$

Ядро Коши используется в решении задачи о скачках, которое мы сейчас напомним (см. [19]). Для гладкой простой замкнутой кривой  $\gamma \subset \mathcal{C}$  и гладкой 1-формы  $\phi$  на  $\gamma$  при  $p \notin \gamma$  интегральное преобразование Коши  $\int_{q \in \gamma} K_{\mathcal{C}}(p, q) \phi(q)$  задает голоморфную 1-форму по  $p$ . Действительно, для  $p \neq q_0$  голоморфность следует из голоморфности ядра  $K_{\mathcal{C}}$  по  $p$ , а голоморфность в точке  $q_0$  следует из того, что вычет ядра Коши в этой точке не зависит от  $q$ , поэтому вычет интегрального преобразования равен нулю в силу условия  $\int_{\gamma_e} \phi = 0$ . Формула Сохоцкого утверждает, что для  $z \in \gamma$  это выражение имеет граничные значения

$$\lim_{p' \rightarrow p \in \gamma} \int_{q \in \gamma} K_{\mathcal{C}}(p', q) \phi(q) = \pm \frac{1}{2} \phi(p) + \oint_{q \in \gamma} K_{\mathcal{C}}(p, q) \phi(q), \quad (5.3)$$



где  $\int$  – классическое обозначение для главного значения в смысле Коши сингулярного интеграла. Окрестность  $\gamma \subset \mathcal{C}$  локально устроена как кольцо со срединной окружностью  $\gamma$ , а пределы берутся по  $p'$  из одной из компонент дополнения к  $\gamma$  в этом кольце. Знак в формуле Сохоцкого соответствует ориентации контура  $\gamma$  как граничной компоненты соответствующей половинки кольца. В силу формулы Сохоцкого интегральное преобразование с нормированным ядром Коши решает задачу о скачках на кривой  $\mathcal{C}$ . При этом полученное решение имеет нулевые  $A$ -периоды.

Для дальнейшего построения ВН-дифференциала нам потребуется вещественно-нормированное ядро Коши, которое мы определим формулой

$$K_{\mathcal{C}}^{\text{re}}(p, q) := K_{\mathcal{C}}(p, q) - \sum_{k=1}^g \alpha_k(q) \omega_k(p), \quad (5.4)$$

где  $\alpha_k$  – координаты вектора  $\alpha(q) := (\text{Im } \tau)^{-1} \text{Im } A(q)$ . Если  $q$  фиксировано, то  $K_{\mathcal{C}}^{\text{re}}$  снова оказывается мероморфным дифференциалом по  $p$  с простыми полюсами в точках  $p = q$  и  $p = q_0$ , где его вычеты равны  $\pm(2\pi i)^{-1}$ . Если фиксировано  $p$ , то  $K_{\mathcal{C}}^{\text{re}}$  оказывается *однозначной вещественно-аналитической* функцией переменной  $q$  вне точки  $q = p$ . Пользуясь свойствами монодромии тета-функции, легко проверить, что все периоды  $K_{\mathcal{C}}^{\text{re}}$  вещественные:

$$\int_{p \in \gamma} K_{\mathcal{C}}^{\text{re}}(p, q) \in \mathbb{R} \quad \forall \gamma \in H_1(\mathcal{C}, \mathbb{Z}).$$

Аналогично, положим

$$K_{\mathcal{C}}^{\text{im}}(p, q) := iK_{\mathcal{C}}(p, q) - i \sum_{k=1}^g \beta_k(q) \omega_k(p), \quad (5.5)$$

где  $\beta_k$  – координаты вектора  $\beta(q) := (\text{Im } \tau)^{-1} \text{Re } A(q)$ . Если фиксировано  $q$ , то  $K_{\mathcal{C}}^{\text{im}}$  является мероморфным дифференциалом по  $p$  с простыми полюсами в точках  $p = q$  и  $p = q_0$ , где его вычеты равны  $\pm(2\pi)^{-1}$ . Если фиксировано  $p$ , то  $K_{\mathcal{C}}^{\text{im}}$  – *многозначная вещественно-аналитическая* функция переменной  $q$  вне точки  $q = p$ . Заметим, что

$$\text{Im} \int_{p \in \gamma} K_{\mathcal{C}}^{\text{im}}(p, q) \in \mathbb{Z} \quad \forall \gamma \in H_1(\mathcal{C}, \mathbb{Z}).$$

Для  $K^{\text{re}}$  и  $K^{\text{im}}$  имеются аналоги формулы Сохоцкого. В них в правой части равенства (5.3) следует рассматривать главные значения интегральных преобразований  $\phi$  с ядрами  $K_{\mathcal{C}}^{\text{re}}$  или  $K_{\mathcal{C}}^{\text{im}}$  соответственно, причем в случае  $K_{\mathcal{C}}^{\text{im}}$  надо еще умножить  $\phi$  на  $i$ . Для доказательства заметим, что  $K_{\mathcal{C}}^{\text{re}}$  и  $K_{\mathcal{C}}^{\text{im}}$  отличаются от  $K_{\mathcal{C}}$  добавкой некоторого голоморфного по  $p$  дифференциала  $\omega(p, q)$  (и еще умножением на  $i$  в случае  $K^{\text{im}}$ ), так что главное значение в смысле Коши интегрального преобразования  $\phi$  с этим добавленным голоморфным дифференциалом – это просто значение интеграла, и его вклад в обе части формулы Сохоцкого (5.3) равен  $\int_{q \in \gamma} \omega(p, q) \phi(q)$ .

4) *Интегральное преобразование с ядром  $K^{\text{re}}$* . Теперь используем ядра Коши для решения задачи о скачках, причем условие почти вещественного нормирования будет обеспечено с помощью ядер  $K^{\text{re}}$  и  $K^{\text{im}}$ .

Для любого набора  $\underline{h} = \{h_e\}$  гладких вещественных 1-форм, заданных на  $\{\gamma_e\}$  и удовлетворяющих условиям  $h_e = -I_e^*(h_{-e})$  для всех  $e$ , а также условию обращения в нуль всех периодов:

$$\int_{q \in \gamma_e} h_e(q) = 0, \tag{5.6}$$

в точках  $p \in C^v$  определим интегральное преобразование Коши

$$\xi^v(p) := \sum_{e \in E_v} \int_{q \in \gamma_e} K_{C^v}^{\text{re}}(p, q) h_e(q). \tag{5.7}$$

Подчеркнем, что эта формула представляет собой интегральное преобразование на нормализации  $C^v$  неприводимой компоненты кривой  $C_{u,0}$ . В частности, ядро  $K_v^{\text{re}}$  не зависит от  $\underline{s}$ . Априори у  $\xi^v$  может быть полюс в точке  $p = q_0$ . Однако вычет  $K_v^{\text{re}}$  в точке  $p = q_0$  равен  $-1/(2\pi i)$  для любого  $q$ , и потому вычет  $\xi^v$  в  $p = q_0$  равен

$$-\frac{1}{2\pi i} \sum_{e \in E_v} \int_{q \in \gamma_e} h_e(q)$$

и обращается в нуль в силу (5.6). Так что  $\xi^v$  можно считать набором из голоморфных дифференциалов  $\xi_e$  в кругах  $U_e$ , где  $e \in E_v$ , и голоморфного дифференциала  $\widehat{\xi}^v$  на  $\widehat{C}_s^v$ . Заметим, что для замкнутого пути  $\gamma \subset \widehat{C}^v$  интеграл

$$\begin{aligned} \int_{p \in \gamma} \widehat{\xi}^v &= \sum_{e \in E_v} \int_{p \in \gamma} \int_{q \in \gamma_e} K_{C^v}^{\text{re}}(p, q) h_e(q) \\ &= \sum_{e \in E_v} \int_{q \in \gamma_e} \left( \int_{p \in \gamma} K_{C^v}^{\text{re}}(p, q) \right) h_e(q) \end{aligned}$$

вещественный, так как  $\int_{p \in \gamma} K_{C^v}^{\text{re}}(p, q) \in \mathbb{R}$ , а форма  $h_e$  вещественная.

Изучим сингулярную часть ядра подробнее. Для ребер  $e, e' \in E_v$ ,  $e \neq e'$ , рассмотрим круги  $z_e = z_e(p) \in V_e$  и  $w_{e'} = w_{e'}(q) \in V_{e'}$  в локальных координатах и введем обозначение

$$\mathbf{K}_v^{\text{re}}(z_e, w_{e'}) dz_e := K_v^{\text{re}}(p, q). \tag{5.8}$$

Для  $p, q \in V_e$  пусть  $\mathbf{K}_v^{\text{re}}$  – голоморфная часть ядра  $K_v^{\text{re}}$ :

$$\mathbf{K}_v^{\text{re}}(z_e, w_e) dz_e := K_v^{\text{re}}(p, q) - \frac{dz_e}{2\pi i(z_e - w_e)}. \tag{5.9}$$

Определим интегральный оператор  $\mathcal{K}^{\text{re}}$  формулой

$$(\mathcal{K}^{\text{re}} \underline{h})_e(z_e) := dz_e \sum_{e' \in E_v(e)} \int_{w_{e'} \in \gamma_{e'}} \mathbf{K}_{v(e)}^{\text{re}}(z_e, w_{e'}) h_{e'}(w_{e'}). \tag{5.10}$$

Поскольку каждый дифференциал  $\mathbf{K}_v^{\text{re}}$  голоморфен по  $z_e$ , оператор  $\mathcal{K}^{\text{re}}$  переводит набор  $\underline{h}$  вещественных 1-форм на множестве швов  $\gamma_e$  в набор голоморфных 1-форм в кругах  $V_e$ ; здесь голоморфность снова является простым следствием того факта, что каждый дифференциал  $\mathbf{K}_v^{\text{re}}$  голоморфен по  $z_e$ . По определению для  $z_e \in V_e$  выполнено равенство

$$\xi^v(z_e) = (\mathcal{K}^{\text{re}}\underline{h})_e(z_e) + dz_e \int_{w_e \in \gamma_e} \frac{h_e(w_e)}{2\pi i(z_e - w_e)}. \quad (5.11)$$

Интеграл выше – сингулярный, а его граничные значения при  $z_e \in \gamma_e$  даются формулой Сохоцкого (5.3):

$$\widehat{\xi}^v(z_e) = (\mathcal{K}^{\text{re}}\underline{h})_e(z_e) + \frac{1}{2}h_e(z_e) + dz_e \int_{w_e \in \gamma_e} \frac{h_e(w_e)}{2\pi i(z_e - w_e)}, \quad (5.12)$$

$$\xi_e(z_e) = (\mathcal{K}^{\text{re}}\underline{h})_e(z_e) - \frac{1}{2}h_e(z_e) + dz_e \int_{w_e \in \gamma_e} \frac{h_e(w_e)}{2\pi i(z_e - w_e)}. \quad (5.13)$$

Поскольку  $\xi_e$  голоморфна в  $U_e$ , ее интеграл вдоль  $\gamma_e = \partial U_e$  равен нулю по теореме о вычетах. Теперь из предположения (5.6) видим, что

$$\int_{p \in \gamma_e} \widehat{\xi}^v(p) = \int_{p \in \gamma_e} \xi_e(p) + \int_{p \in \gamma_e} h_e(p) = 0. \quad (5.14)$$

Чтобы использовать эти соотношения при решении задачи о скачках на  $\widehat{C}_s$ , нам надо сравнить  $\widehat{\xi}^{v(e)}|_{\gamma_e}$  с  $I_e^*(\widehat{\xi}^{v(-e)})|_{\gamma_e}$ . Принимая во внимание равенство  $I_e^*(h_{-e}) = -h_e$  и вспоминая, что  $I_e^*$  обращает ориентацию, для скачка сингулярного интеграла из (5.12) получаем

$$\begin{aligned} & \frac{dz_e}{2\pi i} \cdot \int_{w_e \in \gamma_e} \frac{h_e(w_e)}{z_e - w_e} - \frac{d(sz_e^{-1})}{2\pi i} \cdot \int_{w_e \in \gamma_e} \frac{h_e(w_e)}{sz_e^{-1} - sw_e^{-1}} \\ &= \frac{dz_e}{2\pi i z_e} \int_{w_e \in \gamma_e} h_e(w_e) = 0. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Снова воспользуемся равенством  $h_e = -I_e^*(h_{-e})$  и запишем скачок  $\widehat{\xi}$  в точке  $z_e \in \gamma_e$  в виде

$$(\widehat{\xi}^{v(e)} - I_e^*(\widehat{\xi}^{v(-e)}))(z_e) = (h_e + (\mathcal{K}^{\text{re}}\underline{h})_e - I_e^*((\mathcal{K}^{\text{re}}\underline{h})_{-e}))(z_e). \quad (5.16)$$

Определим матричнозначный оператор  $\underline{\mathcal{K}}^{\text{re}}$  (с индексом  $e \in E$ ) по формуле

$$(\underline{\mathcal{K}}^{\text{re}}\underline{h})_e := (\mathcal{K}^{\text{re}}\underline{h})_e - I_e^*((\mathcal{K}^{\text{re}}\underline{h})_{-e}). \quad (5.17)$$

Теперь равенство (5.16) можно интерпретировать в том смысле, что скачок  $\widehat{\xi}$  на кривой  $\gamma_e$  равен  $[(\underline{I} + \underline{\mathcal{K}}^{\text{re}})\underline{h}]_e$ , где  $\underline{I}$  – единичная матрица.

5) *Интегральное преобразование с ядром  $K^{\text{im}}$* . Мы проведем аналогичное построение на базе ядра  $K^{\text{im}}$ , чтобы разобраться с мнимыми частями скачков в ситуации, когда периоды вещественные. Для произвольного множества  $\underline{g}$

гладких вещественных 1-форм  $g_e$  на швах  $\gamma_e$ , удовлетворяющих для каждого ребра  $e$  соотношениям

$$g_e = -I_e^*(g_{-e}) \quad \text{и} \quad \int_{\gamma_e} g_e = 0,$$

зададим интеграл Коши

$$\chi^v(p) := \sum_{e \in E_v} \int_{q \in \gamma_e} K_v^{\text{im}}(p, q) g_e(q). \quad (5.18)$$

Напомним, что, в отличие от  $K_v^{\text{re}}$ , ядро  $K_v^{\text{im}}$  является многозначным по  $q$ . Однако мы покажем, что  $\chi^v$  корректно определена. Действительно, разность значений двух ветвей  $K_v^{\text{im}}$  является голоморфным дифференциалом  $\omega(p, q)$ , а из определения  $K_v^{\text{im}}$  следует, что для любой точки  $q$

$$\text{Im} \int_{p \in \gamma} \omega(p, q) \in \mathbb{Z} \quad \text{на каждом цикле } \gamma \subset C^v.$$

Таким образом, зафиксировав кривую  $\gamma$  и меняя  $q$ , получим, что мнимая часть  $\text{Im} \int_{p \in \gamma} \omega(p, q) \in \mathbb{Z}$  локально постоянна по  $q$ , так что

$$\text{Im} \int_{p \in \gamma} \partial_q \omega(p, q) = 0 \quad \text{для каждого цикла } \gamma.$$

Но тогда  $\partial_q \omega(p, q)$ , как функция  $p$ , – голоморфный ВН-дифференциал и потому тождественно равен нулю, так что  $\omega(p, q)$  не зависит от  $q$ . В силу этого

$$\int_{q \in \gamma_e} \omega(p, q) g_e(q) = \omega(p) \int_{q \in \gamma_e} g_e(q) = 0.$$

Мы видим, что многозначность  $K_v^{\text{im}}$  пропадает при определении  $\chi^v(p)$ .

Будем снова рассматривать  $\chi^v$  как набор, который состоит из голоморфных 1-форм  $\chi_e$  на кругах  $U_e$ , где  $e \in E_v$ , и голоморфной 1-формы  $\widehat{\chi}^v$  на  $\widehat{C}_s^v$ . В этом случае, по формуле Сохоцкого, при  $z_e \in \gamma_e$  имеем

$$\widehat{\chi}^v(z_e) = (\mathcal{K}^{\text{im}} \underline{g})_e(z_e) + \frac{i}{2} g_e(z_e) + dz_e \int_{w_e \in \gamma_e} \frac{i g_e(w_e)}{2\pi(z_e - w_e)}, \quad (5.19)$$

$$\chi_e(z_e) = (\mathcal{K}^{\text{im}} \underline{g})_e(z_e) - \frac{i}{2} g_e(z_e) + dz_e \int_{w_e \in \gamma_e} \frac{i g_e(w_e)}{2\pi(z_e - w_e)}. \quad (5.20)$$

Аналогично случаю ядра  $\mathcal{K}^{\text{re}}$ , отсюда видно, что  $\int_{\gamma_e} \chi^v = 0$  при  $e \in E_v$ , как в (5.14). Более того, хотя периоды  $K_v^{\text{im}}$  не являются вещественными, периоды формы  $\widehat{\chi}^v$  по циклам  $\gamma \subset \widehat{C}^v$  оказываются вещественными по тем же соображениям, что и выше: мнимая часть каждого периода дифференциала  $K_v^{\text{im}}$  – целое число. Значит, это число не зависит от  $q$  и, будучи умноженным на  $g_e(q)$ , дает нулевой интеграл по  $\gamma_e$ , поскольку  $\int_{q \in \gamma_e} g_e(q) = 0$ .

Аналогично (5.16) можно вычислить скачок формы  $\widehat{\chi}$  в точках  $z_e \in \gamma_e$ :

$$(\widehat{\chi}^{v(e)} - I_e^*(\widehat{\chi}^{v(-e)}))(z_e) = (ig_e + (\mathcal{K}^{\text{im}}g)_e - I_e^*(\mathcal{K}^{\text{im}}g)_{-e})(z_e), \quad (5.21)$$

где правая часть интерпретируется как значение оператора  $iI + \mathcal{K}^{\text{im}}$  на  $g$ .

6) *Почти ВН-решение как рекуррентно заданный ряд.* Теперь мы объединим фрагменты рассуждений выше в конструкцию почти ВН-решения исходной задачи о скачках на  $C_{u,\underline{s}}$  с начальными условиями  $\underline{\phi}$ . Скачки дифференциалов  $\widehat{\xi}$  и  $\widehat{\chi}$  вычислены в (5.16) и (5.21). Значит,  $\omega := \widehat{\xi} + \widehat{\chi}$  является почти ВН-решением задачи о скачках в  $C_{u,\underline{s}}$  с начальными данными  $\underline{\phi}$  при условии, что скачки выбраны правильно, т. е. что  $\underline{h}$  и  $\underline{g}$  удовлетворяют линейному интегральному уравнению

$$\underline{\phi} = (I + \mathcal{K}^{\text{re}})\underline{h} + (iI + \mathcal{K}^{\text{im}})\underline{g}. \quad (5.22)$$

Чтобы адекватно учесть вещественность наборов форм  $\underline{h}$  и  $\underline{g}$ , выделим в этом уравнении вещественную и мнимую части, так что оно приобретает форму

$$\begin{pmatrix} \text{Re } \underline{\phi} \\ \text{Im } \underline{\phi} \end{pmatrix} = (I + \mathcal{K}) \begin{pmatrix} \underline{h} \\ \underline{g} \end{pmatrix}, \quad (5.23)$$

где

$$\mathcal{K} := \begin{pmatrix} \text{Re } \mathcal{K}^{\text{re}} & \text{Re } \mathcal{K}^{\text{im}} \\ \text{Im } \mathcal{K}^{\text{re}} & \text{Im } \mathcal{K}^{\text{im}} \end{pmatrix} \quad (5.24)$$

– вещественный матричнозначный интегральный оператор. Таким образом, нашей целью становится показать, что для любого фиксированного набора начальных данных  $\underline{\phi}$  у линейного интегрального уравнения (5.22) есть решение  $\underline{h}, \underline{g}$ . Если норма оператора  $\mathcal{K}$  достаточно мала, то обратный оператор к  $I + \mathcal{K}$  дается суммой сходящегося ряда  $I + \sum_{l=1}^{\infty} (-\mathcal{K})^l$ , так что решение уравнения (5.23) представляется сходящимися рядами

$$\underline{h} := \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \underline{h}^{(l)}, \quad \underline{g} := \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \underline{g}^{(l)} \quad (5.25)$$

с главными членами  $\underline{h}^0 := \text{Re } \underline{\phi}$ ,  $\underline{g}^0 := \text{Im } \underline{\phi}$  и с членами старших порядков, вычисляемыми по рекуррентным формулам

$$\underline{h}^{(l)} + i\underline{g}^{(l)} := \mathcal{K}^{\text{re}} \underline{h}^{(l-1)} + \mathcal{K}^{\text{im}} \underline{g}^{(l-1)}. \quad (5.26)$$

7) *Оценки для членов ряда.* Чтобы завершить построение почти ВН-решения, осталось показать, что ряд (5.25), члены которого определяются соотношениями (5.26), действительно сходится. С этой целью оценим норму интегрального оператора  $\mathcal{K}$ . Мы получим явные рекуррентные оценки членов ряда (5.26), которые будут критически важны для проводимого ниже анализа поведения почти ВН-решения при  $\underline{s} \rightarrow 0$  и в итоге дадут нам предложение 5.3, значимость которого не сводится к доказательству сходимости ряда (5.26).

Определим  $L^\infty$ -норму набора 1-форм  $\phi_e = \tilde{\phi}_e dz_e$  на швах формулой

$$|\phi|_{\underline{s}} := \max_e \sup_{z_e \in \gamma_e^{s_e}} \left| \frac{2\pi\phi_e}{d \log z_e} \right| = \max_e \left( 2\pi \sqrt{|s_e|} \sup_{z_e \in \gamma_e^{s_e}} |\tilde{\phi}_e| \right). \quad (5.27)$$

Мы ищем оценки для норм  $|\underline{h}^{(l)} + i\underline{g}^{(l)}|_{\underline{s}}$  членов ряда, рекуррентно определенных в (5.26).

Поскольку ядро  $\mathbf{K}^{\text{re}}(p, q)$  – вещественно-аналитическая функция переменной  $q$ , существует такая константа  $M_1$ , что для всех  $v$  и всех  $e, e' \in E_v$  в любых точках  $z_e \in V_e$  и  $w_{e'} \in V_{e'}$  выполнено неравенство

$$|\mathbf{K}_v^{\text{re}}(z_e, w_{e'}) - \mathbf{K}_v^{\text{re}}(z_e, 0)| < M_1 |w_{e'}|. \quad (5.28)$$

Поскольку  $\mathbf{K}^{\text{re}}(p, q)$  вещественно-аналитически зависит от координаты  $u$  в пространстве модулей, константу  $M_1$  можно выбрать одной и той же для кривых из некоторой окрестности точки  $u = 0$ . Мы уже отмечали (и доказали в (5.14)), что  $\int_{p \in \gamma_e} (\mathcal{K}^{\text{re}} \underline{h})_e(p) = 0$  для любого набора дифференциалов  $\underline{h}$ , удовлетворяющего условию  $\int_{p \in \gamma_e} h_e(p) = 0$  при всех  $e$ . Аналогичное утверждение верно для  $\mathcal{K}^{\text{im}} \underline{g}$ , так что из рекуррентного определения (5.26) видно, что

$$\int_{p \in \gamma_e} h_e^{(l)}(p) = \int_{p \in \gamma_e} g_e^{(l)}(p) = 0 \quad \text{для всех } e \text{ и } l.$$

Умножив (5.28) на  $h_{e'}^{(l)}$  и проинтегрировав по  $\gamma_{e'}$ , получим, что вклад  $\mathbf{K}(z_e, 0)$  обращается в нуль, так что в каждой точке  $z_e \in V_e$

$$\begin{aligned} \left| \int_{w_{e'} \in \gamma_{e'}} \mathbf{K}^{\text{re}}(z_e, w_{e'}) h_{e'}^{(l)}(w_{e'}) \right| &< M_1 \sqrt{|s_e|} \sup_{w_{e'} \in \gamma_{e'}} \left| \frac{2\pi i h_{e'}^{(l)}}{d \log w_{e'}} \right| \\ &\leq M_1 \sqrt{|\underline{s}|} |\underline{h}^{(l)}|_{\underline{s}}. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Из определения  $\mathcal{K}^{\text{re}}$  видно, что оценка выше влечет такую же оценку для этого оператора; оценка для  $\mathcal{K}^{\text{im}}$  получается аналогично. Сложив эти неравенства и рассуждая рекурсивно по индексу  $l$ , мы получаем существование такой константы  $M_2$ , что

$$|\underline{h}^{(l)} + i\underline{g}^{(l)}|_{\underline{s}} < (M_2 \sqrt{|\underline{s}|})^l |\phi|_{\underline{s}} \quad (5.30)$$

для каждого  $l$ . Итак, при  $\sqrt{|\underline{s}|} < (2M_2)^{-1}$  члены рядов для  $\underline{h}$  и  $\underline{g}$  ограничены геометрической прогрессией со знаменателем, меньшим  $1/2$ . У такой геометрической прогрессии сумма членов меньше 2, так что для  $|\underline{s}| < (2M_2)^{-2}$  мы доказали центральное неравенство

$$|\underline{h} + i\underline{g}|_{\underline{s}} < 2|\phi|_{\underline{s}}, \quad (5.31)$$

которое мы используем в дальнейшем. Для завершения доказательства сходимости заметим, что, в частности, сумма левых частей неравенств (5.30) по

всем  $l$  сходится, так что сходящийся ряд (5.25) решает линейное интегральное уравнение (5.23). Значит, сумма соответствующих интегралов Коши,  $\widehat{\xi} + \widehat{\chi}$ , дает нам почти ВН-решение исходной задачи о скачках с начальными данными  $\underline{\phi}$ , что и доказывает предложение 5.2.

Нас прежде всего интересует поведение почти ВН-решения при  $\underline{s} \rightarrow 0$  в следующей ситуации. Пусть

$$\underline{f} = \{f_e\} = \{\tilde{f}_e(z_e) dz_e\}$$

– набор голоморфных 1-форм на единичных кругах  $V_e$ . Для произвольного  $|\underline{s}| < 1$  рассмотрим задачу о скачках с начальными данными

$$\{\phi_e\} := \{(f_e - I_e^* f_{-e})|_{\gamma_e^{s_e}}\}.$$

Заметим, что по теореме о вычетах  $\int_{\gamma_e} f_e = 0$  для каждого  $e$ , так что мы вправе использовать данные  $\phi_e$  в задаче о скачках. Тот факт, что  $\phi_e$  является ограничением на шов голоморфной 1-формы, позволит нам явно вычислить главное значение в смысле Коши, возникающее в формуле Сохоцкого, причем для нас будет крайне важно, что ядра Коши  $K_v^{\text{re}}$  и  $K_v^{\text{im}}$  определены на  $C^v$  и не зависят от  $\underline{s}$ .

Определим  $L^\infty$ -норму набора форм  $\underline{f}$  равенством

$$|\underline{f}| := 2\pi \max_e \sup_{|z_e|=1} \left| \frac{f_e}{d \log z_e} \right| = 2\pi \max_e \sup_{|z_e|=1} |\tilde{f}_e|. \quad (5.32)$$

По лемме Шварца в диске  $U_e = \{|z_e| < \sqrt{|s_e|}\}$  имеем

$$|\underline{f}|_{\underline{s}} := |\underline{f}|_{\gamma_e^{s_e}} \leq |\underline{f}| (\sqrt{|\underline{s}|})^{\text{ord } \underline{f}}, \quad (5.33)$$

где мы используем обозначение  $\text{ord } \underline{f} := \min_e (\text{ord}_{q_e} f_e)$ . Кроме того, для каждой неприводимой компоненты  $C^v$  обозначим

$$|\underline{s}_v| := \max_{e \in E_v} |s_e|.$$

Наконец, для стандартной  $L^2$ -нормы дифференциала на  $\widehat{C}_{\underline{s}}^v$  мы используем обозначение

$$\|\omega\|_{\widehat{C}_{\underline{s}}^v}^2 := \frac{i}{2} \int_{\widehat{C}_{\underline{s}}^v} \omega^v \wedge \bar{\omega}^v.$$

Теперь центральная оценка работы формулируется следующим образом.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.3** (оценка почти ВН-решения). *Для фиксированного набора дифференциалов  $\underline{f}$  и произвольного достаточно малого  $|\underline{s}|$  пусть  $\omega_{\underline{s}}$  – почти ВН-решение задачи о скачках с начальными данными*

$$\{\phi_e\} := \{(f_e - I_e^* f_{-e})|_{\gamma_e^{s_e}}\}.$$

*Тогда существует такая постоянная  $M$ , не зависящая от достаточно малых  $|\underline{s}|$ , что на всякой неприводимой компоненте  $C^v$  выполнено неравенство*

$$\|\omega_{\underline{s}}\|_{\widehat{C}_{\underline{s}}^v} \leq M |\underline{f}| (\sqrt{|\underline{s}_v|})^{\text{ord } \underline{f} + 1}. \quad (5.34)$$



Поскольку  $C_{\underline{1}}^v := C^v \setminus \bigcup_{e \in E_v} V_e$  – компактное множество, на котором  $L^2$ - и  $L^1$ -нормы оцениваются друг через друга, приходим к следующей формулировке.

**СЛЕДСТВИЕ 5.4.** *Для произвольного фиксированного пути  $\gamma \subset C_{\underline{1}}^v$  существует такая постоянная  $M_\gamma$ , что для всех достаточно малых и выполняются неравенство*

$$\left| \int_\gamma \omega_{\underline{s}} \right| \leq M_\gamma |f| (\sqrt{|\underline{s}_v|})^{\text{ord } f + 1}.$$

Доказательство предложения 5.3 мы начнем с поточечной оценки.

**ЛЕММА 5.5.** *В ситуации выше существует такая константа  $M_3$ , не зависящая ни от  $u$ , ни от  $\underline{s}$ , что во всякой точке  $z_e \in \gamma_e^{s_e}$  для почти ВН-решения, записанного в виде  $\omega_{\underline{s}}^v = \tilde{\omega}^v(z_e) dz_e$ , выполнено неравенство*

$$|\tilde{\omega}^v(z_e)| < M_3 |f| (\sqrt{|\underline{s}_v|})^{\text{ord } f}. \quad (5.35)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Напомним сначала детали построения почти ВН-решения. Тот факт, что начальные данные являются ограничениями голоморфных 1-форм, позволит нам оценить сингулярный интеграл по теореме о вычетах. Для  $z_e \in V_e$  запишем почти ВН-решение в виде суммы (5.11) и аналогичной формулы для  $\chi$ ; мы получим

$$\omega^v(z_e) = (\mathcal{K}^{\text{re}} \underline{h})_e(z_e) + (\mathcal{K}^{\text{im}} \underline{g})_e(z_e) + \frac{dz_e}{2\pi i} \int_{w_e \in \gamma_e} \frac{h_e(w_e) + ig_e(w_e)}{z_e - w_e}.$$

Первые два слагаемых являются голоморфными функциями  $z_e \in V_e$  (см. обсуждение после формулы (5.10)). Что касается сингулярного интеграла, напомним, что  $\underline{h}$  и  $\underline{g}$  представляются суммами рядов (5.25), чьи члены определены рекуррентно по формулам

$$\begin{aligned} (\underline{h}^{(l)} + ig^{(l)})_e &= (\mathcal{K}^{\text{re}} \underline{h}^{(l-1)} + \mathcal{K}^{\text{im}} \underline{g}^{(l-1)})_e \\ &= (\mathcal{K}^{\text{re}} \underline{h}^{(l-1)} + \mathcal{K}^{\text{im}} \underline{g}^{(l-1)})_e - I_e^* \left( (\mathcal{K}^{\text{re}} \underline{h}^{(l-1)} + \mathcal{K}^{\text{im}} \underline{g}^{(l-1)})_{-e} \right), \end{aligned}$$

где используется определение (5.17) оператора  $\mathcal{K}^{\text{re}}$  (определение  $\mathcal{K}^{\text{im}}$  аналогично). Мы видим, что рекуррентное определение содержит голоморфную форму на  $V_e$  и поднятие голоморфной формы на  $V_{-e}$  отображением  $I_e^*$ . Чтобы это использовать, введем ряд

$$\varphi_e := \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \varphi_e^{(l)}$$

с первым членом  $\varphi_e^{(0)} = f_e$  и остальными членами, равными голоморфным формам из приведенных выше рекуррентных соотношений:

$$\begin{aligned} \varphi_e^{(l)} &:= \mathcal{K}^{\text{re}} \underline{h}^{(l-1)} + \mathcal{K}^{\text{im}} \underline{g}^{(l-1)} \\ &= dz_e \sum_{e' \in E_v} \int_{w_{e'} \in \gamma_{e'}} [\mathbf{K}_v^{\text{re}}(z_e, w_{e'}) h_{e'}^{(l-1)}(w_{e'}) + \mathbf{K}_v^{\text{im}}(z_e, w_{e'}) g_{e'}^{(l-1)}(w_{e'})]. \quad (5.36) \end{aligned}$$

Теперь  $\varphi_e^{(0)}$  – голоморфная форма на  $V_e$ , и то же можно сказать обо всех  $\varphi_e^{(l)}$ ; вдобавок неравенство (5.30) влечет за собой оценку  $|\varphi_e^{(l)}|$  при  $l \geq 1$ , откуда видно, что при достаточно малых  $|\underline{s}|$  ряды, задающие  $\varphi_e$ , равномерно сходятся, так что их суммы  $\varphi_e$  также оказываются голоморфными 1-формами на  $V_e$ . Более того, объединение оценки (5.30) с неравенством Шварца (5.33) влечет за собой соотношения

$$|\varphi|_{\underline{s}} < 2|\underline{f}|_{\underline{s}} \leq 2|\underline{f}|(\sqrt{|\underline{s}_v|})^{\text{ord } \underline{f}}. \quad (5.37)$$

Теперь переищем почти ВН-решение в следующем виде:

$$\begin{aligned} \omega^v(z_e) &= (\mathcal{H}^{\text{re}} \underline{h})_e(z_e) + (\mathcal{H}^{\text{im}} \underline{g})_e(z_e) \\ &+ \frac{dz_e}{2\pi i} \int_{|w_e|=\sqrt{|s_e|}} \frac{\varphi_e(w_e) - I_e^*(\varphi_{-e})(w_e)}{z_e - w_e}, \end{aligned} \quad (5.38)$$

и оценим каждый член в этой формуле. Поскольку форма  $\varphi_e$  голоморфна, по теореме о вычетах для  $|z_e| > \sqrt{|s_e|}$  сингулярный интеграл имеет значение

$$\frac{dz_e}{2\pi i} \int_{|w_e|=\sqrt{|s_e|}} \frac{\varphi_e(w_e) - I_e^*(\varphi_{-e})(w_e)}{z_e - w_e} = -I_e^*(\varphi_{-e})(z_e). \quad (5.39)$$

Действительно, поскольку  $\varphi_e$  голоморфна по  $w_e \in V_e$ , у первого члена в (5.38) нет вычетов в круге  $|w_e| < \sqrt{|s_e|}$ . Второй же член дает

$$\begin{aligned} \frac{dz_e}{2\pi i} \int_{|w_e|=\sqrt{|s_e|}} \frac{\varphi_{-e}(w_e)}{z_e - s_e w_e^{-1}} &= -\frac{dz_e}{2\pi i z_e} \int_{|w_e|=\sqrt{|s_e|}} \frac{w_{-e} \varphi_{-e}(w_{-e})}{s_e z_e^{-1} - w_{-e}} \\ &= \frac{s_e dz_e}{z_e^2} \tilde{\varphi}_{-e}(s_e z_e^{-1}) = -I_e^*(\varphi_{-e}) \end{aligned} \quad (5.40)$$

(напомним, что  $I_e$  обращает ориентацию). Равенство (5.40) непрерывно продолжается на  $|z_e| = \sqrt{|s_e|}$ . Тогда из (5.37) следует, что сингулярный интеграл в (5.38) ограничен величиной  $2|\underline{f}|(\sqrt{|\underline{s}_v|})^{\text{ord } \underline{f}}$ , имеющей порядок нужной нам оценки.

С другой стороны, для нормы  $\mathcal{H}^{\text{re}}$  выполнена оценка (5.29), и аналогичная оценка верна для нормы  $\mathcal{H}^{\text{im}}$ . Объединяя теперь (5.31) с неравенством Шварца, получим

$$|\mathcal{H}^{\text{re}} \underline{h} + \mathcal{H}^{\text{im}} \underline{g}|_{\underline{s}} \leq M'(\sqrt{|\underline{s}_v|})^{\text{ord } \underline{f}+1},$$

что по порядку меньше оценки для сингулярного интеграла. Итак, мы оценили оба слагаемых, сумма которых дает решение  $\omega^v$  в формуле (5.38), что и доказывает лемму 5.5.

Теперь мы можем доказать оценку для  $L^2$ -нормы решения  $\omega$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 5.3. Как и в доказательстве единственности почти ВН-дифференциала, используем выражение (5.1) для  $L^2$ -нормы  $\omega^v$ , полученное по формуле Стокса. Теперь для фиксированной nodальной точки  $e$  нам надо вычислить интеграл

$$\int_{z_e \in \gamma_e} F^{v(e)}(z_e) dF^{v(e)*}(z_e) = \int_{\gamma_e} F^{v(e)}(z_e) \cdot (\omega^v(z_e) + \bar{\omega}^v(z_e)). \quad (5.41)$$

Напомним, что, поскольку  $\int_{z_e \in \gamma_e} \omega^{v(e)}(z_e) = 0$ , этот интеграл не зависит от выбора константы интегрирования в определении  $F^{v(e)}$ , и мы можем зафиксировать какую-то точку  $z_e^0 \in \gamma_e$ , а в правой части (5.41) заменить  $F^{v(e)}(z_e)$  на  $F^{v(e)}(z_e) - F^{v(e)}(z_e^0)$ . По лемме 5.5 мы имеем поточечную оценку

$$|\tilde{\omega}^v| \leq M_3 |f| (\sqrt{|s|})^{\text{ord } f}$$

с константой  $M_3$ , не зависящей от  $u$  и  $s$ . Так как дуга, соединяющая  $z_e^0$  и  $z_e$ , имеет длину не больше  $2\pi\sqrt{|s_e|}$ , то, интегрируя  $\tilde{\omega}$ , мы получаем неравенство

$$F^{v(e)}(z_e) - F^{v(e)}(z_e^0) \leq 2\pi M_3 |f| (\sqrt{|s|})^{\text{ord } f+1}.$$

В итоге имеем оценку

$$\int_{z_e \in \gamma_e} F^{v(e)}(z_e) dF^{v(e)*}(z_e) \leq 2\pi M_3 |f| (\sqrt{|s|})^{\text{ord } f+1} \int_{\gamma_e} |2\omega^v(z_e)|.$$

Применяя снова лемму 5.5, получим поточечную оценку подынтегрального выражения, а после интегрирования вдоль шва возникает еще один сомножитель вида  $2\pi\sqrt{|s_e|}$ , так что, суммируя по всем  $e$ , мы получим

$$\|\omega^v\|^2 \leq 4\pi^2 M_3^2 |f| \left( \sqrt{\max_{e \in E_v} |s_e|} \right)^{2 \text{ord } f+2} \cdot \#E_v. \tag{5.42}$$

Итак, существует постоянная  $M$ , с которой выполнено неравенство (5.34). Предложение доказано 5.3 доказано.

### 6. Вещественно-нормированный дифференциал в координатах вклейки

В этом разделе мы явно строим ВН-дифференциал на произвольной гладкой джет-кривой  $X_{w,u,s}$  в координатах вклейки. Построение начинается с набора ВН-дифференциалов на компонентах  $C^v$  с предписанными сингулярными частями в точках  $p_\ell$  и с вычетами в нодальных точках, определенными решением задачи Кирхгофа с источниками. Заметим, что получающийся дифференциал, строго говоря, не является вещественно-нормированным: даже в случае неприводимой нодальной кривой и дифференциалов без вычетов, когда в пределе также не возникает вычетов, период предельного дифференциала вдоль петли, проходящей через нодальную точку, равен интегралу от ВН-дифференциала на нормализации вдоль пути, соединяющего прообразы нодальной точки, и не обязательно является вещественным.

Теперь мы воспользуемся почти ВН-решением задачи о скачках с начальными данными, соответствующими скачкам построенного набора дифференциалов на  $C^v$ , для построения дифференциала на  $C_{u,s}$ . Поскольку у почти ВН-решений нулевые периоды, мы получим дифференциал, не являющийся вещественно-нормированным. После этого мы применяем рекуррентную процедуру, используя ВН-дифференциалы с вычетами, решающие задачу Кирхгофа с ЭДС, в которой ЭДС равна мнимой части периодов дифференциалов,

построенных на предыдущем шаге. Оценка почти ВН-решения задачи о скачках, данная в предложении 5.3, окажется решающим шагом доказательства сходимости этой конструкции.

Мы будем использовать те же обозначения для вклейки поверхностей и для задачи о скачках, что и в предыдущем разделе.

**ОБОЗНАЧЕНИЯ 6.1.** Для фиксированной гладкой джет-кривой  $X_{w,u,\underline{s}}$  и произвольного набора вещественных чисел  $\underline{c} = \{c_e\}_{e \in E(\Gamma)}$ , удовлетворяющего условиям (0) и (1) в задаче Кирхгофа, обозначим

$$\Phi(\underline{c}) = \{\Phi^v(\underline{c})\}_{v \in V(\Gamma)}$$

набор ВН-дифференциалов на  $C_u^v$  с заданными сингулярными частями  $\sigma_\ell$ , с заданными вычетами  $r_\ell$  (параметризованными координатами  $w$ ) в отмеченных точках  $p_\ell$ , с вычетами  $ic_e$  в прообразах  $q_e$  нодальных точек, и голоморфных вне этих точек.

**ЛЕММА 6.2.** Для каждого набора  $\underline{c}$ , удовлетворяющего условиям (0) и (1) в задаче Кирхгофа, пусть

$$f_e(\underline{c}) := \Phi^{v(e)}(\underline{c})|_{V_e} - \frac{ic_e}{z_e} dz_e$$

– набор голоморфных дифференциалов на  $V_e$ . Пусть  $\omega(\underline{c}) = \{\omega^v(\underline{c})\}$  – почти ВН-решение на  $\widehat{C}_{u,\underline{s}}$  задачи о скачках с начальными данными  $(f_e(\underline{c}) - I_e^* f_{-e}(\underline{c}))|_{\gamma_e^{s_e}}$ . Тогда набор дифференциалов

$$\Psi^v(\underline{c}) := \Phi^v(\underline{c}) - \omega^v(\underline{c}) \quad (6.1)$$

задает однозначно определенный мероморфный дифференциал на  $C_{u,\underline{s}}$  с сингулярными частями  $\sigma_\ell$  и с вычетами  $r_\ell$  в точках  $p_\ell$ , определяемыми координатами  $w$ , голоморфный вне этих точек и такой, что  $\int_{\gamma_e} \Psi(\underline{c}) = 2\pi c_e$  для всякого  $e$  и  $\int_{\gamma} \Psi(\underline{c}) \in \mathbb{R}$  для всякого цикла  $\gamma \in H_1(\widehat{C}_{u,\underline{s}}, \mathbb{Z})$ .

Снова напомним, что последнее условие эквивалентно следующему:

$$\int_{\gamma} \Psi(\underline{c}) \in \mathbb{R}$$

для каждого цикла  $\gamma \in H_1(C_{u,\underline{s}}, \mathbb{Z})$ , не пересекающего швов. Как и в предыдущем разделе, в дальнейшем мы будем опускать координаты  $w$  и  $u$  в наших обозначениях.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Поскольку

$$I_e^* \left( \frac{ic_{-e}}{z_{-e}} dz_{-e} \right) = -\frac{ic_{-e}}{z_e} dz_e = \frac{ic_e}{z_e} dz_e,$$

скачки  $\omega(\underline{c})$  на швах равны скачкам  $\Phi(\underline{c})$ , и в силу нашей конструкции дифференциал  $\Psi(\underline{c})$  на  $\widehat{C}_{\underline{s}}$  не имеет скачков и задает мероморфный дифференциал

на  $C_{\underline{s}}$ , имеющий заданные особенности в точках  $p_\ell$  и голоморфный вне этих точек (простой полюс дифференциала  $\Phi^{v(e)}(\underline{c})$  в точке  $q_e$  удаляется при вклейке). Поскольку  $\int_{\gamma_e} \omega^{v(e)}(\underline{c}) = 0$  для всех  $e$  по определению почти ВН-решения, в силу теоремы о вычетах в круге  $U_e$  имеем

$$\int_{\gamma_e} \Psi(\underline{c}) = -2\pi i \operatorname{Res}_{q_e} \Phi^v(\underline{c}) = 2\pi c_e$$

(что касается знаков, напомним, что кривая  $\gamma_e$  ориентирована как граница  $\widehat{C}^{v(e)}$ ). Поскольку  $\Phi^v(\underline{c})$  вещественно нормирован на  $C^v$ , а периоды формы  $\omega^v(\underline{c})$  вдоль циклов в  $\widehat{C}_{\underline{s}}^v$  вещественны, интеграл от  $\Psi(\underline{c})$  вдоль любого цикла из  $\widehat{C}_{\underline{s}}$  тоже вещественный.

Единственность  $\Psi(\underline{c})$  вытекает из единственности почти ВН-решения задачи о скачках. В самом деле, если  $\Psi'$  – еще один такой дифференциал, то  $\Psi(\underline{c}) - \Psi'$  является голоморфным дифференциалом на  $C_{\underline{s}}$  с нулевыми периодами вдоль швов и с вещественными периодами вдоль циклов, не пересекающих швы. Значит, он является почти ВН-решением задачи о скачках с нулевыми начальными данными, которое тождественно равно нулю. Лемма доказана.

**ОБОЗНАЧЕНИЯ 6.3.** Нашу конструкцию выше можно использовать и в случае, когда заданных особенностей нет. В этом случае пусть набор  $\underline{c}' = \{c'_e\}$  удовлетворяет условиям (0) и (1) в задаче Кирхгофа с отсутствующими источниками, т. е. когда все  $f_\ell$  равны нулю. Пусть  $\Omega(\underline{c}')$  – дифференциал в  $C_{\underline{s}}$ , построенный с помощью вышеописанной процедуры. Тогда  $\Omega(\underline{c}')$  – единственный голоморфный дифференциал на  $C_{\underline{s}}$ , у которого  $\int_{\gamma_e} \Omega(\underline{c}') = 2\pi c'_e$  для каждого  $e$ , а  $\int_{\gamma} \Omega(\underline{c}') \in \mathbb{R}$  для каждого цикла  $\gamma \in H_1(\widehat{C}_{\underline{s}}, \mathbb{Z})$ .

В силу единственности, для таких наборов  $\underline{c}$  и  $\underline{c}'$

$$\Psi(\underline{c} + \underline{c}') = \Psi(\underline{c}) + \Omega(\underline{c}'), \tag{6.2}$$

поскольку правая часть представляет собой дифференциал на  $C_{\underline{s}}$ , удовлетворяющий тем же условиям, что и дифференциал слева. Мы используем это соотношение в следующем разделе.

Рассмотрим ВН-дифференциал  $\Psi_X = \Psi_{w,u,\underline{s}}$  на  $X_{w,u,\underline{s}}$ : у него заданные особенности в точках  $p_\ell$ , он голоморфен вне этих точек и имеет вещественные периоды вдоль всех циклов. В силу единственности таких дифференциалов,  $\Psi_{w,u,\underline{s}}$  равен  $\Psi(\underline{c})$  для  $c_e := \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_e} \Psi_{w,u,\underline{s}}$ . Таким образом, построение ВН-дифференциала  $\Psi_X$  эквивалентно нахождению набора  $\underline{c}$  (зависящего от  $w, u, \underline{s}$ ), для которого  $\Psi_X = \Psi(\underline{c})$ . Мы построим этот набор с помощью рекуррентной процедуры. Мы начнем с решения задачи Кирхгофа с источниками, а затем будем последовательно решать задачу Кирхгофа с ЭДС, равной мнимым частям периодов предыдущего члена ряда. Сложность заключается в том, что периоды вдоль путей, проходящих через нодальные точки, могут быть расходящимися. Покажем прежде всего, что у них возникают логарифмические расходимости, которые легко контролировать.

ОБОЗНАЧЕНИЯ 6.4. Для замкнутого пути  $\gamma$  на  $C$  пусть  $\widehat{\gamma}_{\underline{s}}$  – набор путей, полученных как пересечения  $\gamma \cap \widehat{C}_{\underline{s}}^v$  (в нашей ситуации вклейки удобно, что для любого  $\underline{s}$  поверхность  $\widehat{C}_{\underline{s}}^v$  оказывается подмножеством  $C^v$ ). Эти кривые  $\widehat{\gamma}_{\underline{s}}$  не составляют замкнутого пути на  $C_{\underline{s}}$ , поскольку точка  $\gamma \cap \gamma_e$  не обязательно является прообразом  $\gamma \cap \gamma_{-e}$  относительно отождествления  $I_e$ . Выберем произвольную начальную точку на  $\gamma$ , и пусть  $\gamma_{e_1}, \dots, \gamma_{e_N}$  (где возможны повторения) обозначает множество швов, пересекающихся с  $\gamma$  (выбираем ориентацию так, чтобы  $\gamma$  переходила с  $\gamma_{e_j}$  на  $\gamma_{-e_j}$ ). Через  $C^{v_j}$  обозначим компоненту  $C$ , на которую  $\gamma$  попадает после пересечения  $\gamma_{e_j}$ . Пусть  $\widehat{\gamma}_{\underline{s}}^j$  – отрезок  $\gamma$ , лежащий на  $C^{v_j}$  между  $\gamma_{e_{j-1}}$  и  $\gamma_{e_j}$ . Пусть  $\delta_j$  – дуга  $\gamma_{e_j}$  между точками  $\gamma \cap \gamma_{e_j}$  и  $I_{e_j}^{-1}(\gamma \cap \gamma_{-e_j})$ . Наконец, пусть  $\gamma_{\underline{s}}$  – замкнутый путь на  $C_{\underline{s}}$ , получающийся проходом вдоль  $\{\widehat{\gamma}_{\underline{s}}^1, \delta_1, \dots, \widehat{\gamma}_{\underline{s}}^N, \delta_N\}$  в указанном порядке.

ЛЕММА 6.5. Для любого замкнутого пути  $\gamma$  на  $C$  и любого набора чисел  $\underline{c}$ , удовлетворяющего условиям (0) и (1) в задаче Кирхгофа, существуют такие постоянная  $\Pi_{\gamma}(\underline{c})$  (не зависящая от  $\underline{s}$ , но зависящая от  $w$ ,  $u$ ) и постоянная  $M_5(\underline{c})$  (не зависящая от  $w$ ,  $u$ ,  $\underline{s}$ ), что

$$\left| \operatorname{Im} \int_{\gamma_{\underline{s}}} \Psi(\underline{c}) - \sum_{j=1}^N c_{e_j} \log |s_{e_j}| - \Pi_{\gamma}(\underline{c}) \right| \leq M_5(\underline{c}) \sqrt{|\underline{s}|} \quad (6.3)$$

для любых достаточно малых  $w$ ,  $u$ ,  $\underline{s}$ .

Более того,  $\Pi_{\gamma}(\underline{c})$  зависит только от класса пути  $\gamma$  в когомологиях двойственного графа  $\Gamma$  кривой  $C$ .

Заметим, что для всякого индекса  $j$  дугу  $\delta_{e_j}$  можно выбрать двумя способами, проходя по  $\gamma_{e_j}$  в противоположных направлениях. Однако по определению  $\operatorname{Im} \int_{\gamma_e} \Psi(\underline{c}) = 0$ , так что мнимая часть интеграла от  $\Psi(\underline{c})$  не зависит от этого выбора.

Для доказательства второго утверждения леммы достаточно заметить, что корректно определен гомоморфизм  $H_1(C, \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(\Gamma, \mathbb{Z})$ . Он получается “растяжением” нодальных точек кривой  $C$  в отрезки прямых и последующим стягиванием неприводимых компонент  $C$  в точки. С геометрической точки зрения образ  $\gamma$  в  $H_1(\Gamma, \mathbb{Z})$  просто кодирует последовательность нодальных точек  $C$ , через которые проходит  $\gamma$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что по лемме 6.2

$$\Psi(\underline{c}) = \Phi(\underline{c}) - \omega(\underline{c}).$$

Сначала оценим периоды  $\Phi(\underline{c})$ . Каждый путь  $\gamma_{\underline{s}}^j$  разобьем на три части:  $\gamma_1$  в  $V_{e_{j-1}}$ , соединяющий граничную точку  $U_{e_{j-1}}$  с границей  $V_{e_{j-1}}$ , аналогичный путь  $\gamma_2$  в  $V_{e_j}$  и путь  $\gamma_3$ , связывающий граничную точку  $V_{e_{j-1}}$  с граничной точкой  $V_{e_j}$ . Поскольку открытые множества  $V_e$  не зависят от  $\underline{s}$ , интеграл  $\int_{\gamma_3} \Phi(\underline{c})$  также не зависит от  $\underline{s}$ . Для  $\gamma_2$  имеем

$$\Phi(\underline{c}) = \frac{ic_{e_j}}{z_{e_j}} dz_{e_j} + \Phi'(\underline{c})$$

в  $V_{e_j}$ , где  $\Phi'(\underline{c})$  обозначает регулярную часть. Интегрируя сингулярную часть по пути  $\gamma_2$ , проходящему от  $z' \in \partial V_{e_j}$  (так что  $|z'| = 1$ ) до точки  $z \in \partial U_{e_j}$  (так что  $|z| = \sqrt{|s_{e_j}|}$ ), получаем

$$\operatorname{Im} \int_{\gamma_2} \frac{-ic_e}{z_{e_j}} dz_{e_j} = -c_e \log \left| \frac{z}{z'} \right| = -c_e \log \sqrt{|s_{e_j}|}.$$

Чтобы оценить  $\int_{\gamma_2} \Phi'(\underline{c})$ , добавим к  $\gamma_2$  путь, связывающий  $z$  с 0. Получим путь, не зависящий от  $\underline{s}$ , так что интеграл от  $\Phi'(\underline{c})$  по нему не зависит от  $\underline{s}$ . Поскольку форма  $\Phi'(\underline{c})$  регулярна в  $V_{e_j}$ , ее норма там ограничена, так что интеграл от  $\Phi'(\underline{c})$  по пути в  $V_{e_j}$ , соединяющему  $z$  с 0, ограничен константой, умноженной на  $|z| = \sqrt{|s_{e_j}|}$ . Мы видим, что существуют такие постоянные  $\alpha$  и  $\beta$ , не зависящие от  $\underline{s}$  (но зависящие и от  $\underline{c}$ , и от  $w, u$ ), что

$$\left| \operatorname{Im} \int_{\gamma_2} \Phi(\underline{c}) - \alpha - c_{e_j} \log \sqrt{|s_{e_j}|} \right| < \beta \sqrt{|s_{e_j}|}.$$

Для  $\operatorname{Im} \int_{\gamma_1} \Phi(\underline{c})$  получаем аналогичную оценку. Для этого заметим, что теперь путь идет от границы  $U_{e_{j-1}}$  к границе  $V_{e_{j-1}}$ , а вычет равен  $ic_{-e_{j-1}} = -ic_{e_{j-1}}$ .

Объединяя результаты для  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ , мы видим, что существуют постоянная  $\Pi_\gamma^j(\underline{c})$ , не зависящая от  $\underline{s}$  (и гладко зависящая от  $w, u$ ) и постоянная  $M_6(\underline{c})$ , не зависящая от  $w, u, \underline{s}$ , для которых

$$\left| \operatorname{Im} \int_{\tilde{\gamma}_\underline{s}^j} \Phi^{vj}(\underline{c}) - \frac{1}{2} c_{e_{j-1}} \log |s_{e_{j-1}}| - \frac{1}{2} c_{e_j} \log |s_{e_j}| - \Pi_\gamma^j(\underline{c}) \right| < M_6(\underline{c}) \sqrt{|\underline{s}|} \quad (6.4)$$

при любых достаточно малых  $w, u, \underline{s}$ .

Теперь оценим  $\int_{\gamma_\underline{s}^j} \omega(\underline{c})$ . По следствию 5.4 интеграл  $|\int_{\gamma_3} \omega(\underline{c})|$  ограничен некоторой постоянной, умноженной на  $|f| \sqrt{|\underline{s}|}$ , что соответствует по величине желаемой оценке. К интегралам  $\int_{\gamma_1} \omega(\underline{c})$  и  $\int_{\gamma_2} \omega(\underline{c})$  следствие 5.4 не применимо, поскольку пути в них зависят от  $\underline{s}$ . Однако  $\gamma_2$  лежит в  $V_{e_j}$  и формула (5.38), сингулярный интеграл в которой мы вычислили в (5.39), выражает форму  $\omega|_{V_{e_j}}$  в виде суммы голоморфной формы на  $V_{e_j}$  и  $-f_{-e}(s_e z_e^{-1})$ . Аналогично случаю  $\Phi'(\underline{c})$ , интеграл от голоморфной формы имеет нужный нам вид, а  $-\int_{z'}^z f_{-e}(s_e z_e^{-1}) = \int_{s_e/z}^{s_e/z'} f_{-e}(z_{-e})$  также представляет собой интеграл от голоморфной формы в  $V_{-e}$  по пути от точки  $s_e/z$  абсолютной величины  $\sqrt{|s_e|}$  до точки  $s_e/z'$  абсолютной величины  $|s_e|$ . Таким образом, применимы те же рассуждения и, суммируя, получаем, что  $\int_{\gamma_2} \omega(\underline{c})$  отличается от некоторой постоянной  $\alpha'$  менее чем на  $\beta' \sqrt{|s_{e_j}|}$ , где  $\beta'$  – еще одна постоянная. Интеграл  $\int_{\gamma_1} \omega(\underline{c})$  устроен так же, поэтому в итоге получаем оценку

$$\left| \operatorname{Im} \int_{\tilde{\gamma}_\underline{s}^j} \omega^{vj}(\underline{c}) - E^j(\underline{c}) \right| < M_7(\underline{c}) \sqrt{|\underline{s}|} \quad (6.5)$$

с константой  $E^j$ , не зависящей от  $\underline{s}$  (но зависящей от  $w, u$ ), и с константой  $M_7$ , не зависящей от  $w, u, \underline{s}$ .

Чтобы оценить интеграл от  $\Psi(\underline{c})$  по отрезкам  $\delta_j$ , заметим сначала в случае сингулярной части  $\Phi(\underline{c})$ , что

$$\operatorname{Im} \int_{\delta_j} i c_{e_j} d \log z_{e_j} = 0.$$

Значит, интеграл  $\int_{\delta_j} \Phi'(\underline{c})$  ограничен константой, не зависящей от  $\underline{s}$ , умноженной на  $L^2$ -норму  $\Phi'(\underline{c})$  в  $V_{e_j}$  (что также представляет собой константу, не зависящую от  $\underline{s}$ ) и на длину  $\delta_j$ , имеющую оценку  $2\pi\sqrt{|s_{e_j}|}$ . Аналогично,  $\operatorname{Im} \int_{\delta_j} \omega(\underline{c})$  ограничено константой, не зависящей от  $\underline{s}$ , умноженной на  $\sqrt{|s_{e_j}|}$ , поскольку ограничение  $\omega(\underline{c})$  на шов является суммой голоморфной на  $V_e$  формы и поднятия ограничения на шов голоморфной формы  $f_{-e}$  в  $V_{-e}$ .

Для завершения доказательства леммы достаточно вычесть соотношение (6.5) из (6.4) и просуммировать по всем  $j$  (заметим, что каждый индекс  $e_j$  возникает в сумме дважды, так что два коэффициента  $1/2$  перед членами вида  $c_{e_j} \log |s_{e_j}|$  для  $\hat{\gamma}_j$  и  $\hat{\gamma}_{j+1}$  дают в итоге коэффициент 1 в (6.3)).

Чтобы показать, что  $\Pi_\gamma(\underline{c})$  зависит только от класса гомотопий из  $H_1(\Gamma, \mathbb{Z})$  образа цикла  $\gamma$ , заметим, что на каждой компоненте  $C^v$  дифференциал  $\Psi(\underline{c})$  вещественно нормирован, так что для замкнутых циклов  $\gamma^v \in H_1(C^v, \mathbb{Z})$

$$\operatorname{Im} \int_{\gamma^v} \Psi(\underline{c}) = 0.$$

Итак,  $\Pi_\gamma(\underline{c}) = \Pi_{\gamma'}(\underline{c})$ , если пути  $\gamma$  и  $\gamma'$  отличаются только в  $C^v$ . Это в точности означает, что  $\Pi$  зависит только от  $\gamma \in H_1(\Gamma, \mathbb{Z})$ . Лемма 6.5 доказана.

**ЗАМЕЧАНИЕ 6.6.** В приведенном доказательстве формулировка оценки почти ВН-решения использована со всеми подробностями. По-видимому, было бы намного сложнее получить аналогичные результаты на базе классического подхода к задаче о скачках, использующего ядра Коши  $K_{C_{\underline{s}}}$  на переменных римановых поверхностях.

Теперь мы явно построим ВН-дифференциал  $\Psi_{w,u,\underline{s}}$  на произвольной гладкой джет-кривой в виде  $\Psi(\underline{c})$ , где набор  $\underline{c}$  будет задаваться рядом. Пусть  $\underline{c}^{(0)}(\underline{s}) := \{c_e^{(0)}(\underline{s})\}$  – решение задачи Кирхгофа (на двойственном графе кривой  $C_{u,0}$ ) с источниками интенсивности  $ir_\ell$  и сопротивлениями  $\rho_{|e|}(\underline{s}) = -\log |s_e|$ , совпадающими с  $\log$ -координатами вклейки. Хотя наша конструкция зависит от  $w, u, \underline{s}$ , и тут это будет явно указано, заметим, что ни задача Кирхгофа, ни ее решение не зависят от  $u$ . Здесь мы будем рассматривать только гладкие кривые, так что все числа  $s_e$  отличны от нуля.

Априори по лемме 6.5 у мнимых частей интегралов от  $\Psi(\underline{c}^{(0)})$  могут быть логарифмические расходимости. Однако сумма этих логарифмических расходимостей по замкнутому пути равна

$$\sum c_e^{(0)} \log |s_e| = - \sum c_e^{(0)} \rho_{|e|}$$



и в точности совпадает с левой частью равенства (1.2) (условия (2)) в задаче Кирхгофа. Поскольку  $\underline{c}^{(0)}$  – решение задачи Кирхгофа с источниками, эта сумма равна нулю, так как в задаче нет ЭДС. Так что логарифмические расходимости взаимно уничтожаются, и мы получаем неравенство

$$\left| \operatorname{Im} \int_{\gamma_{\underline{s}}} \Psi(\underline{c}^{(0)}) - \Pi_{\gamma}(\underline{c}^{(0)}) \right| < M(\underline{c}^{(0)})\sqrt{|\underline{s}|}, \quad (6.6)$$

в котором постоянная  $M$  не зависит от  $w, u, \underline{s}$ , а  $\Pi_{\gamma}$  не зависит от  $\underline{s}$ . Чтобы справиться с периодами формы  $\Psi(\underline{c}^{(0)})$ , имеющими ненулевую мнимую часть, введем поправочное слагаемое  $\underline{c}^{(1)}(\underline{s})$ , равное решению задачи Кирхгофа с ЭДС на двойственном графе кривой  $C_{u,0}$ , где ЭДС равна

$$\mathcal{E}_{\gamma_{\underline{s}}}^{(0)} := -\operatorname{Im} \int_{\gamma_{\underline{s}}} \Psi(\underline{c}^{(0)}). \quad (6.7)$$

Напомним, что в силу равенства (6.2)

$$\Psi(\underline{c}^{(0)}(\underline{s}) + \underline{c}^{(1)}(\underline{s})) - \Psi(\underline{c}^{(0)}(\underline{s})) = \Omega(\underline{c}^{(1)}(\underline{s})),$$

где форма  $\Omega$  определена в обозначениях 6.3. Мы можем использовать лемму 6.5 для оценки периодов  $\Omega(\underline{c}(\underline{s}))$  (здесь мы меняем наши обозначения, чтобы подчеркнуть, что появляющиеся константы связаны с голоморфным дифференциалом):

$$\left| \operatorname{Im} \int_{\gamma_{\underline{s}}} \Omega(\underline{c}^{(1)}(\underline{s})) - \sum_{e: q_e \in \gamma} c_e^{(1)} \log |s_e| - \tilde{\Pi}_{\gamma}(\underline{c}^{(1)}) \right| \leq \tilde{M}(\underline{c}^{(1)})\sqrt{|\underline{s}|}.$$

В итоге мы получаем оценки для мнимых частей периодов:

$$\left| \operatorname{Im} \int_{\gamma_{\underline{s}}} \Psi(\underline{c}^{(0)}(\underline{s}) + \underline{c}^{(1)}(\underline{s})) - \tilde{\Pi}_{\gamma}(\underline{c}^{(1)}) \right| \leq \tilde{M}(\underline{c}^{(1)})\sqrt{|\underline{s}|}. \quad (6.8)$$

Теперь мы действуем рекуррентным образом и для каждого  $l > 1$  вводим ЭДС

$$\mathcal{E}_{\gamma_{\underline{s}}}^{(l)} := \sum_{e: q_e \in \gamma} c_e^{(l)} \log |s_e| - \operatorname{Im} \int_{\gamma_{\underline{s}}} \Omega(\underline{c}^{(l)}). \quad (6.9)$$

Обозначим  $c_e^{(l+1)}(\underline{s})$  решение задачи Кирхгофа с ЭДС, в которой ЭДС равна  $\mathcal{E}_{\gamma_{\underline{s}}}^{(l)}$ , так что выполнена оценка, аналогичная (6.8):

$$\left| \operatorname{Im} \int_{\gamma_{\underline{s}}} \Psi \left( \sum_{i=0}^l \underline{c}^{(i)}(\underline{s}) \right) - \tilde{\Pi}_{\gamma}(\underline{c}^{(l)}) \right| \leq \tilde{M}(\underline{c}^{(l)})\sqrt{|\underline{s}|}. \quad (6.10)$$

Таким образом, как только мы покажем, что величины  $c_e^{(l)}(\underline{s})$  сходятся к нулю при  $l \rightarrow \infty$ , в силу того, что  $\tilde{\Pi}_{\gamma}(\underline{c}^{(l)})$  и  $\tilde{M}(\underline{c}^{(l)})$  непрерывно зависят от  $\underline{c}^{(l)}$  и равны нулю при  $\underline{c} = 0$  (дифференциал  $\Omega(\underline{0})$  обращается в нуль как почти ВН-решение задачи о скачках для нулевого скачка), мнимые части периодов формы  $\Psi \left( \sum_{l=0}^{\infty} \underline{c}^{(l)} \right)$  окажутся равными нулю – при условии, что ряд сходящийся. Это мы теперь и докажем.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.7.** *Для всякой стабильной джет-кривой  $X$  существует такое число  $t \in \mathbb{R}_+$ , что для любого набора  $\underline{s}$ , удовлетворяющего условию  $|\underline{s}| < t$ , сходится ряд*

$$c_e(\underline{s}) := \sum_{l=0}^{\infty} c_e^{(l)}(\underline{s}) \quad (6.11)$$

*из слагаемых, рекуррентно определенных выше, а дифференциал  $\Psi(\underline{c})$  является ВН-дифференциалом на  $X_{w,u,\underline{s}}$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Так как форма  $\Omega(\underline{c})$  линейно зависит от  $\underline{c}$ , то отображение, переводящее  $\underline{c}^{(l)}$  в  $\underline{c}^{(l+1)}$ , – это линейное отображение конечномерных вещественных векторных пространств. Пусть  $M$  обозначает норму этого отображения; тогда  $|\underline{c}^{(l+1)}| \leq M|\underline{c}^{(l)}|$ , где  $|\underline{c}| := \max_e |c_e|$ . В силу конструкции  $\underline{c}^{(l+1)}(\underline{s})$  является решением задачи Кирхгофа для ЭДС  $\underline{c}^{(l)}$ . Априорная оценка из леммы 1.7 для решений задачи Кирхгофа с ЭДС означает, что

$$|\underline{c}^{(l+1)}(\underline{s})| \leq (-\log |\underline{s}|)N|\underline{c}^{(l)}| \leq MN(-\log |\underline{s}|)|\underline{c}^{(l)}(\underline{s})| \quad (6.12)$$

(напомним, что  $N$  равно рангу  $H^1(\Gamma)$  и потому представляет собой константу). Итак, при  $|\underline{s}| < t = e^{-MN}$  члены  $\underline{c}^{(l)}$  ограничены геометрической прогрессией со знаменателем, меньшим 1. Таким образом, эти члены сходятся к нулю, а сам ряд (6.11) сходится, и, как мы уже объясняли, отсюда следует, что дифференциал  $\Psi(\underline{c})$ , построенный по значению этой суммы, является ВН-дифференциалом. Предложение доказано.

## 7. Предельный ВН-дифференциал. Доказательство теоремы 3.7

Докажем центральный результат работы о пределах ВН-дифференциалов. Решающую роль при этом будут играть априорные оценки на силы тока, решающие задачу Кирхгофа, которые получены в леммах 1.6 и 1.7. В частности, они означают, что в окрестности стабильной кривой вычеты ВН-дифференциалов имеют *равномерные* априорные оценки.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.7.** Пусть  $\{X_k\}$  – последовательность гладких джет-кривых, сходящаяся к стабильной джет-кривой  $X$ . Пусть  $\underline{c}_k^{(0)}$  – решение задачи Кирхгофа с токами для сопротивлений  $\rho_{|e|,k} = -\log |s_{e,k}|$  и интенсивностей источников  $f_{\ell,k}$ . Мы считаем, что оно сходится к пределу  $\underline{c}^{(0)}$ . Пусть  $\Psi_k$  – ВН-дифференциал на  $X_k$ ; по предложению 6.7 он равен  $\Psi_k(\underline{c}_k)$ , где  $\underline{c}_k$  – сумма ряда из этого предложения с начальным членом  $\underline{c}_k^{(0)}$ . Аналогично доказательству единственности почти ВН-решения или началу доказательства предложения 5.3, для нормы разности  $\Psi_k - \Psi_k(\underline{c}_k^{(0)})$  воспользуемся теоремой Стокса как в формуле (5.1). Как и прежде, просуммируем результаты по всем  $e$  и рассмотрим пары членов, соответствующие  $e$  и  $-e$ . У дифференциала  $\Psi_k$  все периоды вещественные, так что  $F_k = \text{Im} \int \Psi_k$  – глобально определенная однозначная функция на  $C_{\underline{s}}$  и ее значения на  $\gamma_e$  совпадают с поднятием значений на  $\gamma_{-e}$

отображением  $I_e$ . С другой стороны, функция

$$F_k(\underline{c}_k^{(0)}) = \text{Im} \int \Psi_k(\underline{c}_k^{(0)})$$

многозначна на  $C_{\underline{s}}$ , поскольку интегралы по циклам, пересекающим швы, не обязательно вещественные. Следовательно, разность значения ограничения функции  $F_k(\underline{c}_k^{(0)})$  на  $\widehat{C}^{v(e)}$  на шов  $\gamma_e$  и значения ограничения на  $\gamma_{-e}$  в  $\widehat{C}^{v(-e)}$  равна мнимой части интеграла от  $\Psi_k(\underline{c}_k^{(0)})$  вдоль некоторого цикла  $\gamma_e^\vee$  на  $C_{\underline{s}}$ , пересекающего  $\gamma_e$ . Поэтому

$$\begin{aligned} \|\Psi_k - \Psi_k(\underline{c}_k^{(0)})\|^2 &= \sum_e \int_{\gamma_e} (F_k - F_k(\underline{c}_k^{(0)})) d(F_k^* - F_k^*(\underline{c}_k^{(0)})) \\ &= \sum_e \left| \text{Im} \int_{\gamma_e^\vee} \Psi_k(\underline{c}_k^{(0)}) \right| \cdot \left| \int_{\gamma_e} d(F_k^* - F_k^*(\underline{c}_k^{(0)})) \right| \\ &= \pi \sum_e |c_{e,k} - c_{e,k}^{(0)}| \cdot \left| \text{Im} \int_{\gamma_e^\vee} \Psi_k(\underline{c}_k^{(0)}) \right|, \end{aligned} \tag{7.1}$$

где, напомним, по лемме 6.5 период вдоль  $\gamma_e^\vee$  зависит только от класса этого цикла в группе  $H_1(\Gamma, \mathbb{Z})$ , т. е. только от последовательности нодальных точек, через которые путь проходит. Теперь пусть  $k$  достаточно велико, так что  $w_k, u_k, \underline{s}_k$  (сходящиеся к нулю при  $k \rightarrow \infty$ ) достаточно малы, чтобы выполнялись все оценки из предыдущих утверждений.

По определению интеграл в правой части (7.1) равен величине  $-\mathcal{E}_{\gamma_e^\vee, k}^{(0)}$ , использованной при построении ВН-дифференциала в предыдущем разделе. Класс пути  $\gamma_e^\vee$  в гомологиях не зависит от  $\underline{s}$ , и в силу доказательства предложения 6.7

$$|\mathcal{E}_{\gamma_e^\vee, k}^{(0)}| < M_{\gamma_e^\vee} |c_k^{(0)}|.$$

Рассмотрим теперь наборы чисел  $\underline{c}_k = \{c_{e,k}\}$ , построенные в предыдущих разделах, т. е. заданные суммами рядов для  $X_k$ , в которых  $\Psi_k = \Psi_{X_k}(\underline{c}_k)$ . Тогда по построению и в силу оценки (6.12) имеем

$$|c_{e,k} - c_{e,k}^{(0)}| = \left| \sum_{l=1}^{\infty} c_{e,k}^{(l)} \right| \leq -\frac{|c_k^{(0)}|}{\log |\underline{s}_k|}.$$

Поскольку ввиду (1.3) нормы  $|c_k^{(0)}|$  равномерно ограничены для достаточно малых  $w, u, \underline{s}$  (это центральное место, где используются априорные оценки решений задачи Кирхгофа!), т. е. при достаточно больших  $k$ , в итоге из (7.1) вытекает оценка

$$\|\Psi_k - \Psi_k(\underline{c}_k^{(0)})\| < M(-\log |\underline{s}_k|)^{-1/2} \tag{7.2}$$

с постоянной  $M$ , не зависящей от достаточно большого  $k$ .

Напомним, что, по лемме 6.2,  $\Psi_k(\underline{c}_k^{(0)}) - \Phi_k(\underline{c}_k^{(0)})$  – почти ВН-решение задачи о скачках, норма которого ограничена по предложению 5.3. Тогда получаем

$$\|\Psi_k(\underline{c}_k^{(0)}) - \Phi_k(\underline{c}_k^{(0)})\|_{C_s^v} < M_1 |\underline{s}_k|^{1/2} \tag{7.3}$$

с некоторой постоянной  $M_1$ . В результате из сходимости наборов чисел  $\underline{c}_k^{(0)}$  следует сходимость непрерывно от них зависящих дифференциалов  $\Phi_k(\underline{c}_k^{(0)})$ , а из двух оценок выше следует сходимость дифференциалов

$$\Psi_k = \Psi_{X_k}(\underline{c}_k).$$

Иными словами, существует предельный ВН-дифференциал.

Перейдем ко второй части утверждения. Если последовательность  $\{X_k\}$  допустимая, то по лемме 1.13 наборы  $\underline{c}_k^{(0)}$  сходятся к решению  $\underline{c}^{(0)}$  многомасштабной задачи Кирхгофа с обобщенным сопротивлением

$$\mathbb{P}\underline{\rho} = \lim \mathbb{P}\underline{\rho}_k \in \mathbb{S}_+^{\#|E|-1}.$$

Тогда в силу рассуждений выше ВН-дифференциалы  $\Psi_k$  сходятся к  $\Phi(\underline{c}^{(0)})$ . Теорема 3.7 доказана.

## 8. Пределы нулей ВН-дифференциалов

В этом разделе мы наконец-то сформулируем и докажем основной результат статьи, описывающий пределы нулей ВН-дифференциалов. Мы покажем, что если у дифференциалов  $\Psi_{X_k}$  существует предел нулей как набор точек с кратностями на кривой  $C$ , то он образует дивизор нулей подходящего “подкрученного” набора ВН-дифференциалов на компонентах  $C^v$ , у которых могут быть полюсы высокого порядка в некоторых нодальных точках, а вычеты в них даны рядами вида (6.11). Подкрученный дифференциал  $\Phi$  возникает как предел ограничений дифференциалов  $\Psi_k$  на компоненты  $C^v$ , масштабированных некоторой последовательностью положительных множителей  $\mu_k$ , зависящей от  $v$ .

Пусть  $X_k$  – последовательность гладких кривых с предписанными особенностями, в которой кривые  $C_k$  сходятся к стабильной кривой  $C$ , и пусть дивизоры нулей дифференциалов  $\Psi_k$  имеют предел в виде набора точек с кратностями на  $C$ . Поскольку пространство сингулярных частей  $\sigma_\ell$ , рассматриваемое с точностью до одновременного умножения на числа из  $\mathbb{R}_+$ , компактно, то найдется подпоследовательность, по которой сингулярные части  $\{\sigma_{\ell,k}\}$ , рассматриваемые с точностью до масштабирования с коэффициентом из  $\mathbb{R}_+$ , сходятся. Так как при масштабировании нули дифференциалов не меняются, то мы масштабируем сингулярные части элементов последовательности так, чтобы они сходились сами (а не с точностью до умножения на константу). Таким образом, можно считать, что последовательность гладких джет-кривых  $X_k$  сходится к стабильной джет-кривой  $X$ . Более того, такая сходящаяся последовательность должна содержать допустимую подпоследовательность, так что в оставшейся части раздела мы без ограничения общности фиксируем допустимую последовательность  $\{X_k\} = \{X_{w_k, u_k, \underline{s}_k}\}$ , сходящуюся к  $X$ . По теореме 3.7 для этой последовательности существует предельный дифференциал  $\Psi$  на  $C$ . Мы собираемся исследовать пределы нулей  $\Psi_k$  на тех компонентах  $C^v$ , на которых  $\Psi$  равен нулю тождественно.

ОБОЗНАЧЕНИЯ 8.1. Назовем *подкривой  $D$  стабильной кривой  $C$*  некоторое подмножество множества неприводимых компонент  $C^v$  кривой  $C$ . С геометрической точки зрения  $D$  – это объединение (не обязательно связное) соответствующих компонент. Комбинаторные данные, задающие подкривую  $D \subset C$ , задают также подкривые  $D_u \subset C_{u,0}$  близких стабильных кривых. Будем говорить, что две подкривые  $C$  дизъюнкты, если никакая неприводимая компонента  $C$  не содержится в них обеих. В частности, подкривые, называемые нами дизъюнктными, могут тем не менее пересекаться в нодальных точках.

Обозначим через  $I_D$  множество внутренних нодальных точек  $D$ , т. е. таких  $e \in E(\Gamma)$ , что  $q_e, q_{-e} \in D$ , а через  $E_D$  обозначим множество нодальных точек, в которых  $D$  пересекается со своим дополнением, т. е. таких  $e \in E(\Gamma)$ , что  $q_e \in D$ , но  $q_{-e} \notin D$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.2. Для последовательности мероморфных дифференциалов  $\nu_k$  на гладких кривых  $\{C_k\}$ , сходящихся к кривой  $C$ , и последовательности положительных чисел  $\mu_k$  будем говорить, что существует  *$\mu$ -масштабный предел  $\nu_k$*  на подкривой  $D \subset C$ , если на всякой компоненте  $C^v \subset D$  существует такой мероморфный дифференциал  $\nu^v$ , отличный от *тождественного* нуля, что на всяком компакте  $K \subset C^v \setminus \bigcup_{e \in E_v} \{q_e\}$  последовательность дифференциалов  $\mu_k \nu_k|_K$  сходится к  $\nu^v|_K$ .

В большей общности, пусть даны разложение  $D$  на дизъюнкты подкривые

$$D = D^{(0)} \cup D^{(1)} \cup \dots \cup D^{(L)}$$

и последовательности положительных чисел  $\mu_k^{(0)}, \dots, \mu_k^{(L)}$ . Будем говорить, что существует  *$\mu$ -многомасштабный предел* дифференциалов  $\nu_k$  на  $D$ , если для любого индекса  $0 \leq \lambda \leq L$  существует  $\mu^{(\lambda)}$ -масштабный предел  $\nu_k$  на  $D^{(\lambda)}$ . Обозначим набор пределов  $\nu^v$  на компонентах  $C^v \subset D$  через  $\mathbb{P}_D^\mu \nu$ .

Заметим, что выбор последовательности  $\mu_k$ , для которой существует  $\mu$ -масштабный предел, неоднозначен. Любая последовательность  $\mu'_k$ , для которой отношение  $\mu_k/\mu'_k$  имеет конечный ненулевой предел, приводит к тому же определению масштабного предела. Поэтому для многомасштабных пределов мы будем индексировать подкривые  $D^{(\lambda)}$  так, чтобы

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\mu_k^{(\lambda')}}{\mu_k^{(\lambda)}} = 0 \quad \text{при } \lambda' < \lambda$$

(если же такой предел конечен, то мы будем рассматривать объединение  $D^{(\lambda)}$  и  $D^{(\lambda')}$  как одну подкривую). Многомасштабный предел  $\mathbb{P}_D^\mu \nu$  будет трактоваться как такой набор мероморфных дифференциалов на компонентах  $C^v \subset D$ , что на всякой подкривой  $D^{(\lambda)}$  набор дифференциалов  $\mathbb{P}_{D^{(\lambda)}}^{\mu^{(\lambda)}} \nu$  задан с точностью до одновременного масштабирования с положительным постоянным коэффициентом.

В этой терминологии наша основная теорема будет заключаться в утверждении, что у любой допустимой последовательности есть подпоследовательность, для которой можно указать стратификацию  $C = C^{(0)} \cup \dots \cup C^{(L)}$  и последовательности  $\mu_k^{(0)}, \dots, \mu_k^{(L)}$  такие, что дифференциалы  $\Psi_k$  на  $C$  сходятся

к  $\mu$ -многомасштабному пределу  $\mathbb{P}_C^\mu \Psi$ . Соответствующее доказательство будет использовать ВН-дифференциалы на *сглаженных подкривых*. Введем необходимые для дальнейшего дополнительные определения и обозначения.

**ОБОЗНАЧЕНИЯ 8.3.** Для рассматриваемой допустимой последовательности  $\{X_k\}$  и заданной подкривой  $D \subset C$  обозначим через  $D_k$  гладкую кривую (возможно, несвязную), полученную объединением всех неприводимых компонент  $C_{u_k,0}$ , лежащих в  $D$ , и вклейкой с параметрами  $s_{e,k}$  во всех внутренних нодальных точках  $e \in I_D$ . Через  $\Psi_{D_k}^+$  мы обозначим ВН-дифференциал на  $D_k$  со следующими сингулярными частями:

- (a)  $\sigma_{\ell,k}$  в точках  $p_\ell \in D$ ,
- (b) простой полюс, с вычетом  $i c_{e,k}$ , в каждой внешней нодальной точке  $e \in E_D$ ,

голоморфный вне этих точек (напомним, что для наборов чисел  $c_k$  мы имеем  $\Psi_k = \Psi_{X_k}(c_k)$ ; иными словами,  $2\pi c_{e,k} = \int_{\gamma_e} \Psi_k$ ).

Для заданной подкривой  $D \subset C$  рассмотрим также дифференциал на дополнительной подкривой  $D' := C \setminus \overline{D}$ , который определен аналогично, за тем исключением, что во внешних нодальных точках  $E_{D'} = -E_D$  особенности должны “сбалансировать” джеты дифференциала  $\Psi_{D_k}^+$  в точках  $e \in E_D$ .

**ОБОЗНАЧЕНИЯ 8.4.** Для заданного мероморфного дифференциала  $\nu^v$  на  $C^v$  и нодальной точки  $e \in E_v$  положим

$$m_e := \text{ord}_{q_e} \nu^v$$

(эта величина отрицательна, если  $\nu^v$  имеет полюс в точке  $q_e$ ) и обозначим  $u_{j,e}$  коэффициенты ряда Лорана дифференциала  $\nu^v$  в  $q_e$ :

$$\nu^v|_{V_e} =: \sum_{j=m_e}^{\infty} u_{j,e} z_e^j dz_e.$$

Теперь зафиксируем натуральное  $m$ ; в дальнейшем мы будем считать его достаточно большим. Через  $J_e(\nu^v)$  обозначим сумму голоморфного  $m$ -джета дифференциала  $\nu^v$  и его сингулярного члена первого порядка в  $q_e$ :

$$J_e(\nu^v) := \sum_{j=-1}^{m-1} u_{j,e} z_e^j dz_e$$

(мы включили  $u_{-1,e} z_e^{-1} dz_e$  в джет для удобства и упрощения дальнейших обозначений; допуская вольность,  $J_e$  будем по-прежнему называть  $m$ -джетом дифференциала).

**ОБОЗНАЧЕНИЯ 8.5.** Для подкривой  $D \subset C$  *балансирующим дифференциалом* называется ВН-дифференциал  $\Psi_{D_k}^-$  на  $D'_k$  со следующими особенностями:

- (a)  $\sigma_{\ell,k}$  в точках  $p_\ell \in D'$ ,
- (b)  $\sigma_{-e,k} = I_{-e}^*(J_e(\Psi_{D_k}^+))$  в каждой внешней нодальной точке  $e \in E_{D'} = -E_D$ ,

голоморфный вне этих точек. В явном виде сингулярная часть дифференциала  $\Psi_{D_k}^-$  в  $q_{-e}$  дается формулой

$$\sigma_{-e,k} = - \left( s_e \sum_{j=-1}^{m-1} s_e^j u_{j,e,k} z_{-e}^{-j-2} \right) dz_{-e}, \quad (8.1)$$

где  $u_{j,e,k}$  – коэффициенты  $m$ -джета  $J_e(\Psi_{D_k}^+)$  и, напомним,  $u_{-1,e,k} = i c_{e,k}$  по определению дифференциала  $\Psi_{D_k}^+$ .

В дальнейшем набор сингулярных частей балансирующего дифференциала  $\Psi_{D_k}^-$  будет обозначаться через  $\mathcal{S}_{D,k}$ :

$$\mathcal{S}_{D,k} := (\{\sigma_{\ell,k}\}_{p_\ell \in D'}; \{\sigma_{-e,k}\}_{e \in E_D}). \quad (8.2)$$

По определению  $\mathcal{S}_{D,k}$  является точкой векторного пространства

$$\mathbb{C}^{(m+1)\#E_D + \sum_{p_\ell \in D'} (m_\ell + 1)}.$$

Обозначим через  $\mathbb{P}\mathcal{S}_{D,k}$  его проективизацию, т. е. точку на сфере, являющейся факторизацией этого векторного пространства по действию  $\mathbb{R}_+$ . Подчеркнем, что  $\mathbb{P}\mathcal{S}_{D,k}$  имеет смысл только тогда, когда хотя бы одна из заданных сингулярных частей дифференциала  $\Psi_{D_k}^-$  ненулевая.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.6.** Для заданной подкривой  $D \subset C$  назовем допустимую последовательность  $\{X_k\}$  *джет-допустимой на  $D$* , если хотя бы одна сингулярная часть из набора  $\mathcal{S}_{D,k}$  отлична от нуля и предел  $\mathbb{P}\mathcal{S}_D := \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}\mathcal{S}_{D,k}$  существует на сфере.

Теперь дадим индуктивное определение стратификации кривой  $C$  и соответствующей многомасштабной шкалы. Сначала мы упростим обозначения.

**ОБОЗНАЧЕНИЯ 8.7.** Для подкривых  $C^{(0)}, \dots, C^{(\lambda)}$  кривой  $C$  положим

$$C^{(\leq \lambda)} := C^{(0)} \cup \dots \cup C^{(\lambda)}$$

и обозначим через  $C^{(> \lambda)}$  дополнительную к ним подкривую:

$$C^{(> \lambda)} := \overline{C} \setminus C^{(\leq \lambda)}.$$

Для краткости обозначений также будем писать

$$\mathcal{S}_k^{(\lambda)} = \mathcal{S}_{C_k^{(\leq \lambda-1)}}, \quad E^{(\lambda)} := E_{C^{(\leq \lambda)}}$$

и обозначим

$$\Psi_k^{(\leq \lambda)} := \Psi_{C_k^{(\leq \lambda)}}^+ \quad \text{и} \quad \Psi_k^{(> \lambda)} := \Psi_{C_k^{(\leq \lambda)}}^-.$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.8.** Допустим, что для некоторого индекса  $\lambda \geq 0$  заданы дизъюнктивные подкривые  $C^{(0)}, \dots, C^{(\lambda)}$ . Предположим, что для фиксированной многомасштабной шкалы  $\mu_k^{(0)}, \dots, \mu_k^{(\lambda)}$  у дифференциалов  $\Psi_k$  существует

$\mu$ -многомасштабный предел  $\mathbb{P}_{C^{(\leq \lambda)}}^\mu \Psi$  на  $C^{(\leq \lambda)}$ . Также предположим, что если  $C^{(\leq \lambda)} \subsetneq C$ , то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k^{(\lambda)} \Psi_k \Big|_{C^{(> \lambda)}} = 0.$$

Тогда будем говорить, что последовательность  $\{X_k\}$  *джет-сходится на шаге*  $\lambda$ , если для любого  $\lambda' < \lambda$  она джет-допустима на  $C^{(\leq \lambda')}$ .

Назовем допустимую последовательность *джет-сходящейся*, если для какого-то  $\lambda = L$  подкривая  $C^{(\leq L)}$  совпадает со всей кривой  $C$ . В этом случае соответствующее разложение  $C = C^{(0)} \cup \dots \cup C^{(L)}$  назовем *стратификацией по порядку зануления*.

**ЗАМЕЧАНИЕ 8.9.** Понятие стратификации по порядку зануления аналогично понятию слабого полного порядка, индуцированного функцией уровня, введенному в [2].

Данное выше определение джет-сходящихся последовательностей мотивировано тем, что, как будет показано ниже, для последовательности, сходящейся на уровне  $\lambda$ , как сам масштаб  $\mu^{(\lambda)}$ , так и предел последовательности на подкривой  $C^{(\lambda)}$  в этом масштабе однозначно определяется данными на уровне  $\lambda - 1$ .

Точнее, по определению если последовательность джет-сходится на шаге  $\lambda$ , то найдется последовательность положительных чисел  $\mu_k^{(\lambda)}$ , для которой существует ненулевой предел

$$\mathcal{S}^{(\lambda)} := \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k^{(\lambda)} \mathcal{S}_k^{(\lambda)} \quad (8.3)$$

(напомним, что  $\mathcal{S}_k^{(\lambda)} := \mathcal{S}_{C_k^{(\leq \lambda-1)}}$ ). То, что  $X_k$  является допустимой последовательностью, означает, что наборы скоростей вырождения  $\mathbb{P}_{\rho_k}$  сходятся в  $\mathbb{S}_+^{\#|E|-1}$ , а значит, каждое подмножество компонент  $\mathbb{P}_{\rho_k}$  также сходится в соответствующем раздутии сферы. Таким образом, последовательность гладких кривых  $C_k^{(> \lambda-1)}$  также является допустимой. Пусть  $X_k^{(> \lambda-1)}$  обозначает гладкую джет-кривую с подлежащей кривой  $C_k^{(> \lambda-1)}$  и с предписанными сингулярными частями  $\mu_k^{(\lambda)} \mathcal{S}_k^{(\lambda-1)}$ . Эта последовательность сходится к стабильной джет-кривой  $X^{(> \lambda-1)}$  с предписанными сингулярными частями  $\mathcal{S}^{(\lambda)}$ . Теперь по теореме 3.7 на кривой  $C^{(> \lambda-1)}$  существует предельный ВН-дифференциал

$$\Phi^{(\lambda)} := \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k^{(\lambda)} \Psi_k^{(> \lambda)}. \quad (8.4)$$

При этом в нашем индуктивном построении джет-сходящихся последовательностей кривая  $C^{(\lambda)} \subset C^{(> \lambda-1)}$  будет определяться как подкривая, составленная из неприводимых компонент, на которых  $\Phi^{(\lambda)}$  отличен от тождественного нуля.

По существу доказательство основной теоремы ниже сводится к доказательству того, что на всех компонентах подкривых  $C^{(\lambda)}$  имеет место равенство

$$\Phi^{(\lambda)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k^{(\lambda)} \Psi_k. \quad (8.5)$$

Забегая вперед и считая это равенство уже доказанным, мы дадим следующее определение.



ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.10. Для любой компоненты  $C^v \subset C^{(\lambda)}$  положим

$$\mathbb{P}\Phi^v := \mathbb{P}\Phi^{(\lambda)}|_{C^v}$$

и назовем набор мероморфных дифференциалов  $\{\mathbb{P}\Phi^v\}$  *подкрученным предельным дифференциалом* на  $C$ . *Дивизор нулей* подкрученного предельного дифференциала определяется как множество нулей (с кратностями) всех дифференциалов  $\mathbb{P}\Phi^v$  вне нодальных точек, плюс нодальные точки  $q_{|e|}$  кривой  $C$ , взятые с кратностями

$$\text{ord}_{q_e} \mathbb{P}\Phi^{v(e)} + \text{ord}_{q_{-e}} \mathbb{P}\Phi^{v(-e)} + 2,$$

и отмеченные точки  $p_\ell$ , взятые с кратностями

$$m_\ell + 1 - \text{ord}_{p_\ell} \mathbb{P}\Phi^v,$$

где  $C^v$  – компонента, содержащая  $p_\ell$ .

ЗАМЕЧАНИЕ 8.11. Заметим, что в силу теоремы 3.7 дифференциал  $\mathbb{P}\Phi^v$  является ВН-дифференциалом на  $C^v$ , сингулярные части которого являются пределом, с точностью до масштабирования, сингулярных частей (8.1) и сингулярных частей  $\sigma_\ell$  в отмеченных точках  $p_\ell \in C^v$ . Поэтому  $\mathbb{P}\Phi^v$  может иметь полюсы высших порядков в нодальных точках.

Сформулируем теперь основную теорему о пределах нулей ВН-дифференциалов. До сих пор целое число  $m$  из определения балансирующего дифференциала (8.1) было произвольным. Теперь мы выберем  $m$  достаточно большим, чтобы гарантировать существование джет-сходящихся последовательностей и обеспечить неравенство (8.19). Положим

$$m_0 := 2g - 2 + \sum_{\ell} (m_\ell + 1).$$

ТЕОРЕМА 8.12. Для произвольного  $m > 2m_0$  всякая последовательность  $X_k$  содержит джет-сходящуюся подпоследовательность. Для джет-сходящейся последовательности гладких джет-кривых при любом  $\lambda$  выполнено равенство (8.5), в котором  $\Phi^{(\lambda)}$  определено равенством (8.4). Пределы нулей (с кратностями) дифференциалов  $\Psi_k$  на  $C_k$  существуют и образуют дивизор нулей подкрученного предельного дифференциала  $\Phi$ .

Мы будем доказывать теорему индукцией по числу уровней стратификации по порядку зануления. Базис индукции:  $L = 0$ . Как уже отмечалось выше, любая последовательность  $\{X_k\}$  содержит допустимую последовательность. В этом случае  $C = C^{(0)}$ ,  $\Psi_k = \Psi_k^{(\leq \lambda)}$  и предельный ВН-дифференциал  $\Phi$  не обращается в нуль тождественно ни на какой неприводимой компоненте  $C^v$  кривой  $C$ . Значит, в этом случае теорема сводится к доказательству того, что предельный ВН-дифференциал дается формулой  $\Phi = \Phi^{(0)}$ . Это в точности утверждение теоремы 3.7 о предельных ВН-дифференциалах.

*Индуктивное предположение на шаге  $\lambda \geq 0$* : предполагается, что для последовательности  $\{X_k\}$ , джет-сходящейся на шаге  $\lambda$ , имеет место равенство (8.5),

в котором  $\Phi^{(\lambda)}$  определено равенством (8.4); кроме того, предполагается, что если  $C^{(\leq \lambda)} \subsetneq C$ , то предел  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k^{(\lambda)} \Psi_k|_{C^{(> \lambda)}}$  тождественно равен нулю.

Для вывода индуктивного предположения на шаге  $\lambda + 1$  из индуктивного предположения на шаге  $\lambda$  нам потребуются следующие две леммы. Сначала мы докажем лемму, утверждающую, что  $(\mu_k^{(0)}, \dots, \mu_k^{(\lambda)})$ -многомасштабные пределы дифференциалов  $\Psi_k|_{C^{(\leq \lambda)}}$  и  $\Psi_k^{(\leq \lambda)}$  совпадают.

**ЛЕММА 8.13.** *Если выполнено индуктивное предположение на шаге  $\lambda$ , то для любого  $\lambda' \leq \lambda$  на любой компоненте  $C^v \subset C^{(\leq \lambda')}$  выполнено равенство*

$$\Phi^{(\lambda')} = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k^{(\lambda')} \Psi_k|_{C^v} = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k^{(\lambda')} \Psi_k^{(\leq \lambda)}|_{C^v}.$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** По индуктивному предположению многомасштабный предел дифференциалов  $\Psi_k|_{C^{(\leq \lambda)}}$  равен  $\Phi$ , так что нам надо показать, что у дифференциалов  $\Psi_k^{(\leq \lambda)}$  такой же многомасштабный предел. Обозначим через  $v_k^{(\lambda)}$  почти ВН-решение следующей задачи о скачках на  $C^{(\leq \lambda)}$ : скачки  $v_k^{(\lambda)}$  на швах  $\gamma_e$ ,  $e \in I_{C^{(\leq \lambda)}}$ , равны нулю, а на  $\gamma_e$ ,  $e \in E^{(\lambda)}$ , они равны

$$(\Psi_k - ic_{e,k} z_e^{-1} dz_e)|_{\gamma_e}. \quad (8.6)$$

С формальной точки зрения это новый тип задачи о скачках, поскольку начальные данные заданы не только на швах на месте нодальных точек  $C^{(\leq \lambda)}$ , но и на швах  $\gamma_e$ ,  $e \in E^{(\lambda)}$ , ограничивающих окрестности  $U_e^{s_{e,k}}$  точек  $q_e \in C^{(\leq \lambda)}$ . Однако так как

$$\int_{\gamma_e} (\Psi_k - ic_{e,k} d \log z_e) = 0,$$

эта задача о скачках решается буквально так же и решение дается интегралами Коши, в которых интегрирование теперь проходит вдоль путей  $\gamma_e$ ,  $e \in E^{(\lambda)}$ . Выполнены такие же оценки:  $L^2$ -норма  $v_k^{(\lambda)}$  оценивается через  $L^\infty$ -норму начальных данных, равную  $L^\infty$ -норме  $\Psi_k - ic_{e,k} d \log z_e$  на  $\gamma_e$ . По условию леммы существует такая постоянная  $M$ , что

$$\|v_k^{(\lambda)}\|_{C_k^{(\leq \lambda)}} < M(\mu_k^{(\lambda)})^{-1} \sqrt{|s_k|}. \quad (8.7)$$

Рассмотрим дифференциал  $\tilde{\Psi}_k^{(\leq \lambda)}$ , равный  $\Psi_k - v_k^{(\lambda)}$  на  $C^{(\leq \lambda)} \setminus \bigcup_{e \in E^{(\lambda)}} U_e^{s_{e,k}}$  и равный  $ic_{e,k} d \log z_e - v_k^{(\lambda)}$  в  $U_e^{s_{e,k}}$ . По определению  $v_k^{(\lambda)}$  у него нулевые скачки на всех швах, в том числе на  $\gamma_e$ ,  $e \in E^{(\lambda)}$ , так что это мероморфный дифференциал на  $C^{(\leq \lambda)}$ , который вещественно нормирован и имеет те же особенности, что и дифференциал  $\Psi_k^{(\leq \lambda)}$ . Значит,  $\tilde{\Psi}_k^{(\leq \lambda)} = \Psi_k^{(\leq \lambda)}$ . Теперь из оценки (8.7) мы видим, что на каждом компакте  $K \subset C^v \subset C^{(\lambda')}$ , не содержащем нодальных точек,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k^{(\lambda')} (\Psi_k - \Psi_k^{(\leq \lambda)})|_K = 0.$$

Лемма доказана.

Для дальнейшего нам потребуются оценки на порядки нулей и полюсов дифференциала  $\Phi^{(\lambda)}$ .

ЛЕММА 8.14. Пусть предположение индукции выполнено на шаге  $\lambda$ . Для  $e \in E^{(\lambda)}$  обозначим  $m_e := \text{ord}_{q_e} \Phi^{(\lambda)}$ . Тогда выполнено следующее неравенство:

$$\sum_{e \in E^{(\lambda)}} m_e \leq m_0. \tag{8.8}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что  $\Psi_k^{(\leq \lambda)}$  – мероморфный дифференциал на  $C_k^{(\leq \lambda)}$  с особенностями в виде полюсов порядка  $m_\ell + 1$  только в отмеченных точках  $p_\ell$  и, быть может, с простыми полюсами в нодальных точках из  $E^{(\lambda)}$ . Так что полное число нулей (с кратностями) дифференциала  $\Psi_k^{(\leq \lambda)}$  не превосходит

$$2g(C_k^{(\leq \lambda)}) - 2 + \sum_{\ell} (m_\ell + 1) + \#E^{(\lambda)}.$$

В силу леммы 8.13

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k^{(\lambda)} \Psi_k^{(\leq \lambda)} \Big|_{C^{(\lambda)}} = \Phi^{(\lambda)}.$$

Поскольку для достаточно больших  $k$  полное число (с кратностями) нулей и полюсов дифференциала  $\Psi_k^{(\leq \lambda)}$ , лежащих в  $V_e$ , не зависит от  $k$  и, в случае предельного дифференциала  $\Phi^{(\lambda)}$ , равно  $m_e$ , для достаточно больших  $k$  у дифференциала  $\Psi_k^{(\leq \lambda)}$  имеется  $m_e + 1$  нуль и единственный простой полюс в  $V_e$ . Так как число нулей дифференциала  $\Psi_k^{(\leq \lambda)}$  в непересекающихся окрестностях  $V_e$ ,  $e \in E^{(\lambda)}$ , не превосходит суммарной кратности его полюсов, то получаем неравенство

$$\sum_{e \in E^{(\lambda)}} (m_e + 1) \leq 2g(C_k^{(\leq \lambda)}) - 2 + \sum_{\ell} (m_\ell + 1) + \#E^{(\lambda)},$$

что и дает нам утверждение леммы после сокращения величин  $\#E^{(\lambda)}$  с двух сторон и учета неравенства  $g(C_k^{(\leq \lambda)}) \leq g(C_k)$ . Лемма доказана.

Теперь мы приступим к доказательству основного результата.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 8.12. Предположим, что для последовательности  $\{X_k\}$  предположение индукции выполнено на шаге  $\lambda$ . Нашей ближайшей задачей будет доказательство того, что существует подпоследовательность, для которой мы сможем определить масштаб следующего уровня  $\mu^{(\lambda+1)}$ , дифференциал  $\Phi^{(\lambda+1)}$  и подкривую  $C^{(\lambda+1)}$ .

Рассмотрим набор данных  $\mathcal{S}_k^{(\lambda+1)}$ , определяющих сингулярные части дифференциалов  $\Psi_k^{(> \lambda)}$ . Сингулярные части в точках  $q_{-e}$ ,  $e \in E^{(\lambda)}$ , определяются условием сбалансированности

$$\sigma_{-e,k} = I^*(J_e(\Psi_k^{(\leq \lambda)})).$$

По предположению индукции после умножение на  $\mu_k^{(\lambda)}$  дифференциалы  $\Psi_k^{(\leq \lambda)}$  сходятся к  $\Phi^{(\lambda)}$ . Из утверждения леммы 8.14 следует, что  $m$ -джет дифференциала  $\Phi^{(\lambda)}$  отличен от нуля. Значит, набор данных  $\mathcal{S}_k^{(\lambda+1)}$  нетривиален. Поэтому корректно определена проективизация этих данных, представляющая

собой точку сферы, которая компактна. Следовательно, найдется подпоследовательность, переходя к которой мы можем считать, что существует последовательность положительных чисел  $\mu_k^{(\lambda+1)}$ , для которой существует ненулевой предел

$$\mathcal{S}^{(\lambda+1)} := \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k^{(\lambda+1)} \mathcal{S}_k^{(\lambda+1)}. \quad (8.9)$$

То, что  $X_k$  является допустимой последовательностью, означает, что наборы скоростей вырождения  $\mathbb{P}_{\rho_k}$  сходятся в  $\mathbb{S}_+^{\#|E|-1}$ , а значит, каждое подмножество компонент  $\mathbb{P}_{\rho_k}$  также сходится в соответствующем раздутии сферы. Таким образом, последовательность гладких кривых  $C_k^{(>\lambda)}$  также является допустимой. Пусть  $X_k^{(>\lambda)}$  обозначает гладкую джет-кривую с подлежащей кривой  $C_k^{(>\lambda)}$  и с предписанными сингулярными частями  $\mu_k^{(\lambda+1)} \mathcal{S}_k^{(\lambda+1)}$ . Эта последовательность сходится к стабильной джет-кривой  $X^{(>\lambda)}$  с предписанными сингулярными частями  $\mathcal{S}^{(\lambda+1)}$ . Теперь по теореме 3.7 существует предельный ВН-дифференциал, т. е. мы можем определить дифференциал  $\Phi^{(\lambda+1)}$  равенством (8.4), в котором  $\lambda$  заменено на  $\lambda + 1$ . После этого мы определим  $C^{(\lambda+1)}$  как подкривую, состоящую из всех неприводимых компонент  $C \setminus C^{(\leq \lambda)}$ , где дифференциал  $\Phi^{(\lambda+1)}$  не равен тождественно нулю.

Составной частью предположения индукции на шаге  $\lambda$  является равенство  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k^{(\lambda)} \Psi_k|_{C^{(>\lambda)}} = 0$ . Из этого предположения непосредственно следует, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k^{(\lambda)} \mathcal{S}_k^{(\lambda+1)} = 0.$$

Так как определенный выше  $\mu_k^{(\lambda+1)}$ -масштабный предел  $\mathcal{S}^{(\lambda+1)}$  сингулярных частей  $\mathcal{S}_k^{(\lambda+1)}$  конечен, имеем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\mu_k^{(\lambda)}}{\mu_k^{(\lambda+1)}} = 0.$$

Ниже, переходя, если требуется к подпоследовательности, существование которой мы доказали выше, мы будем предполагать, что последовательность  $X_k$  джет-допустима на уровне  $\lambda$ , т. е. что вдоль этой последовательности выполняется равенство (8.9).

Решающую роль в доказательстве шага индукции играет следующее утверждение.

**ЛЕММА 8.15.** *Если предположение индукции выполнено на шаге  $\lambda$ , то для любого компакта  $K \subset C^{(\lambda+1)}$ , не содержащего нодальных точек, дифференциалы  $\mu_k^{(\lambda+1)} \Psi_k$  равномерно сходятся к дифференциалу  $\Phi^{(\lambda+1)}|_K$ .*

Доказательство леммы мы предварим анализом поведения  $\Phi^{(\lambda+1)}$  в окрестности точки  $q_{-e}$ , где  $e \in E^{(\lambda)}$ .

**ЛЕММА 8.16.** *Пусть предположение индукции выполнено на шаге  $\lambda$ . Тогда существует такая постоянная  $M$ , что для каждого  $e \in E^{(\lambda)}$  и любого  $k$  выполнено неравенство*

$$\mu_k^{(\lambda+1)}|_{s_{e,k}}|^{m_e+1} < M \mu_k^{(\lambda)}. \quad (8.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Через  $u_{j,e} := \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k^{(\lambda)} u_{j,e,k}$  обозначим пределы масштабированных коэффициентов тейлоровского ряда для  $\Psi_k^{(\leq \lambda)}$  в точке  $q_e$  (если они существуют). Поскольку  $\text{ord}_{q_e} \Phi^{(\lambda)} = m_e$  по определению, предел  $u_{m_e,e}$  существует и отличен от нуля, а  $u_{j,e} = 0$  при  $0 \leq j < m_e$ . Джет-сходимость на шаге  $\lambda$  означает, что сингулярная часть  $\sigma_{-e,k}$  имеет  $\mu^{(\lambda+1)}$ -масштабный предел. Таким образом, пределы

$$\lim \mu_k^{(\lambda+1)} u_{-j-2,-e,k} = - \lim \mu_k^{(\lambda+1)} s_{e,k}^{j+1} u_{j,e,k}$$

(где мы обозначили  $u_{-1,e,k} := -ic_{e,k}$ ) существуют при  $e \in E^{(\ell)}$  и  $-1 \leq j \leq m-1$  — здесь мы использовали условие сбалансированности. В частности, при  $j = m_e$  у этой последовательности существует конечный предел

$$a := \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k^{(\lambda+1)} s_{e,k}^{m_e+1} u_{m_e,e,k}. \tag{8.11}$$

Так как предел  $u_{m_e,e} = \lim \mu_k^{(\lambda)} u_{m_e,e,k}$  также существует, конечен и отличен от нуля, отношение этих последовательностей, равное  $\mu_k^{(\lambda+1)} s_{e,k}^{m_e+1} (\mu_k^{(\lambda)})^{-1}$ , стремится к конечному ненулевому пределу  $a/u_{m_e,e}$ . В частности, оно ограничено сверху некоторой постоянной  $M$ , не зависящей от  $k$ . Лемма доказана.

Продолжая анализ, мы получим оценку для порядка полюса дифференциала  $\Phi^{(\lambda+1)}$  в точке  $q_{-e}$ , которая нам потребуется в дальнейшем; напомним, что  $m_e := \text{ord}_{q_e} \Phi^{(\lambda)}$ .

ЛЕММА 8.17. Пусть выполнено предположение индукции на шаге  $\lambda$ . Тогда для всех  $e \in E^{(\lambda)}$

$$\text{ord}_{q_{-e}} \Phi^{(\lambda+1)} \geq -m_e - 2. \tag{8.12}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что поскольку существует  $\mu^{(\lambda)}$ -масштабный предел дифференциалов  $\Psi_k^{(\leq \lambda)}$  на  $C^{(\lambda)}$ , по лемме 8.13, равный дифференциалу  $\Phi^{(\lambda)}$ , то для каждого целого  $j$ ,  $m_e < j < m$ , коэффициенты  $\mu_k^{(\lambda)} u_{j,e,k}$  имеют оценку, не зависящую от  $k$ . Значит, найдутся такие  $k_0$  и постоянная  $M$ , что при  $k > k_0$  выполнено неравенство

$$\left| \frac{u_{m_e,e,k}}{u_{j,e,k}} \right| > M_1. \tag{8.13}$$

Теперь предположим, рассуждая от противного, что порядок полюса  $\Phi^{(\lambda+1)}$  в точке  $q_{-e}$  выше, чем  $m_e + 2$ , так что  $\mu^{(\lambda+1)}$ -масштабный предел коэффициентов  $u_{-j-2,e,k}$  для некоторого  $j$ ,  $m_e < j < m$ , отличен от нуля. В силу условия сбалансированности это эквивалентно существованию ненулевого предела

$$b := \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k^{(\lambda+1)} s_{e,k}^{j+1} u_{j,e,k}.$$

Разделив равенство (8.11) на этот предел, с помощью оценки (8.13) для абсолютной величины получаем противоречие:

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \lim \left| \frac{\mu_k^{(\lambda+1)} s_{e,k}^{m_e+1} u_{m_e,e,k}}{\mu_k^{(\lambda+1)} s_{e,k}^{j+1} u_{j,e,k}} \right| = \lim \left| \frac{u_{m_e,e,k}}{u_{j,e,k}} s_{e,k}^{m_e-j} \right| > M_1 |s_{e,k}|^{m_e-j} = \infty.$$

Лемма доказана.

Теперь можно показать, что дивизор нулей подкрученного дифференциала  $\Phi$  действительно не содержит нодальных точек с отрицательными коэффициентами.

**СЛЕДСТВИЕ 8.18.** *Дивизор нулей подкрученного предельного дифференциала является линейной комбинацией точек нодальной кривой с неотрицательными коэффициентами.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** По определению это утверждение означает, что для каждой нодальной точки  $e$  мы должны доказать неравенство

$$\text{ord}_{q_e} \Phi^{v(e)} + \text{ord}_{q_{-e}} \Phi^{v(-e)} \geq -2.$$

Если  $e$  такова, что найдется  $\lambda$ , для которой  $C^{v(e)}, C^{v(-e)} \subset C^{(\lambda)}$ , то подкрученный дифференциал  $\Phi^{(\lambda)}$  оказывается предельным ВН-дифференциалом и потому у него могут быть разве что простые полюсы в нодальных точках, что немедленно влечет нужное неравенство. Для прочих нодальных точек существует такое  $\lambda$ , что  $q_e \in C^{(\lambda)}$ , но  $q_{-e} \notin C^{(\leq \lambda)}$ . В этом случае требуемое неравенство в точности получается по лемме 8.17. Следствие доказано.

Теперь мы готовы дать доказательство главной технической леммы.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 8.15.** Рассмотрим дифференциалы  $\Psi_k^{(\leq \lambda)}$  и  $\Psi_k^{(> \lambda)}$ . Они задают дифференциал на сглаживании  $C_{u_k, \underline{0}}$  в нодальных точках  $E \setminus E^{(\lambda)}$ , который оказывается вещественно-нормированным на всех циклах, не проходящих через нодальные точки  $E^{(\lambda)}$ . Рассмотрим задачу о скачках с нулевыми скачками на швах, соответствующих внутренним нодальным точкам  $e \in I_{C^{(\leq \lambda)}}$  и  $e \in I_{C^{(> \lambda)}}$ , и со скачком на шве  $\gamma_e$  при  $e \in E^{(\lambda)}$ , заданным формулой

$$\Psi_k^{(\leq \lambda)}|_{\gamma_e} - I_e^* (\Psi_k^{(> \lambda)}|_{\gamma_{-e}}). \quad (8.14)$$

Пусть  $\omega_k^{(\lambda)}$  – почти ВН-решение этой задачи о скачках на кривой  $C_k$ . Тогда разность

$$\nu := (\Psi_k^{(\leq \lambda)} \sqcup \Psi_k^{(> \lambda)}) - \omega_k^{(\lambda)}$$

представляет собой дифференциал на  $C_k^{(\leq \lambda)} \sqcup C_k^{(> \lambda)}$ , у которого также нет скачков на швах  $\gamma_e$  при  $e \in E^{(\lambda)}$ . Таким образом,  $\nu$  – корректно определенный дифференциал на гладкой кривой  $C_k$  со следующими свойствами:

(а) у него есть особенности только в точках  $p_e$ , где сингулярные части заданы координатами  $w_k$  (особенности в точках  $q_e$ , где  $e \in E^{(\lambda)}$ , были вырезаны при заклейке);

(б) все интегралы от  $\nu$  вдоль циклов на  $C_k$ , не пересекающих швы  $\gamma_e$  с  $e \in E^{(\lambda)}$ , вещественные;

(с) по определению вычетов дифференциалов  $\Psi_k^{(\leq \lambda)}$  в точках  $q_e$  интеграл от  $\nu$  вдоль шва  $\gamma_e$  с  $e \in E^{(\lambda)}$  равен  $2\pi c_{e,k}$ , что равно и интегралу от  $\Psi_k$  вдоль этого шва (интеграл вдоль шва от почти ВН-решения равен нулю).

Итак,  $\Psi_k - \nu$  является голоморфным дифференциалом на  $C_k$ , все периоды которого вдоль циклов, не пересекающих швы  $\gamma_e$ ,  $e \in E^{(\lambda)}$ , вещественные, в то время как периоды вдоль этих швов нулевые. Используя буквально те же рассуждения, что и в доказательстве единственности  $\Psi_X(\underline{c})$ , и применяя теорему Стокса, мы видим, что этот дифференциал нулевой, так что  $\nu$  совпадает с  $\Psi_k$ .

Преимущество этой конструкции  $\Psi_k$  перед той, которая использовалась ранее в разделе 6, состоит в том, что условие сбалансированности (8.1) дает значительно лучшую верхнюю оценку начальных данных в задаче о скачках, задающей форму  $\omega_k^{(\lambda)}$ . Действительно, для  $e \in E^{(\lambda)}$  рассмотрим голоморфные дифференциалы  $f_{e,k}$  на  $V_e$  и  $f_{-e,k}$  на  $V_{-e}$ , заданные формулами

$$f_{e,k} := \Psi_k^{(\leq \lambda)}|_{V_e} - J_e(\Psi_k^{(\leq \lambda)}) = \sum_{j=m}^{\infty} u_{j,e,k} z_e^j dz_e, \tag{8.15}$$

где  $u_{j,e,k}$  – коэффициенты ряда Тейлора для  $\Psi_k^{(\leq \lambda)}$  в точке  $q_e$ , и

$$f_{-e,k} := \Psi_k^{(> \lambda)} - \sigma_{-e,k} = \sum_{j=0}^{\infty} u_{j,-e,k} z_{-e}^j dz_{-e}, \tag{8.16}$$

где  $u_{j,-e,k}$  – коэффициенты ряда Лорана для  $\Psi_k^{(> \lambda)}$  в точке  $q_{-e}$ .

Из условия сбалансированности (8.1) следует, что

$$\Psi_k^{(\leq \lambda)}|_{\gamma_e} - I_e^*(\Psi_k^{(> \lambda)}|_{\gamma_{-e}}) = f_{e,k}|_{\gamma_e} - I_e^*(f_{-e,k}|_{\gamma_{-e}}).$$

Поскольку дифференциал  $f_{e,k}$  голоморфен в  $V_e$ , а дифференциал  $f_{-e,k}$  голоморфен в  $V_{-e}$ , мы можем использовать предложение 5.3 для оценки почти ВН-решения  $\omega_k^{(\lambda)}$  задачи о скачках, поставленной выше.

Так как  $C^v \setminus \{V_e\}_{e \in E_v}$  – компактное подмножество  $C^v \setminus \{q_e\}_{e \in E_v}$ , то последовательность дифференциалов  $\mu_k^{(\lambda)} \Psi_k^{(\leq \lambda)}$  сходится на нем. Значит, каждый член ряда Тейлора также сходится, и потому  $\mu_k^{(\lambda)} f_{e,k}$  (сумма всех членов ряда Тейлора, начиная с  $m$ -го) сходится на  $C^v \setminus \{V_e\}_{e \in E_v}$ . В частности, дифференциалы  $\mu_k^{(\lambda)} f_{e,k}$  сходятся на окружности  $\{|z_e| = 1\} = \partial V_e$ , норма на которой нам нужна, чтобы использовать оценку из предложения 5.3. Мы видим из (8.15), что для всякой нодальной точки  $e \in E^{(\lambda)}$  у дифференциала  $\mu_k^{(\lambda)} f_{e,k}$  есть нуль в  $q_e$  порядка по крайней мере  $m$ . Значит, существует такая постоянная  $M$ , не зависящая от достаточно малых  $w$ ,  $u$ ,  $\underline{s}$  (для чего достаточно, чтобы  $k$  было достаточно большим), что

$$|f_{e,k}|_{\underline{s}} < M (\mu_k^{(\lambda)})^{-1} \max_{e \in E^{(\lambda)}} |s_{e,k}|^{(m+1)/2}.$$

Напомним теперь, что для каждого  $e$  по лемме 8.14 выполнено  $m_e \leq m_0 < m/2$ , так что  $|s_{e,k}|^{(m+1)/2} < |s_{e,k}|^{m_e+1/2}$  для достаточно больших  $k$ . Применяя это неравенство к правой части оценки выше и умножая результат на  $|\mu_k^{(\lambda+1)}|$ , мы получим неравенство

$$\mu_k^{(\lambda+1)} |f_{e,k}|_{\underline{s}} < M \max_{e \in E^{(\lambda)}} |s_{e,k}|^{1/2}, \tag{8.17}$$

где мы использовали оценку отношения  $\mu_k^{(\lambda+1)}/\mu_k^{(\lambda)}$  из леммы 8.16.

Теперь оценим  $f_{-e,k}$ . По условию джет-сходимости на шаге  $\lambda$  дифференциалы  $\mu_k^{(\lambda+1)}\Psi_k^{(>\lambda)}$  сходятся к  $\Phi^{(\lambda+1)}$ . Поскольку дифференциалы  $\mu_k^{(\lambda+1)}f_{-e,k}$  являются правильными частями  $\mu_k^{(\lambda+1)}\Psi_k^{(>\lambda)}$ , они тоже сходятся и, значит, найдется такая постоянная  $M_2$ , не зависящая от достаточно малых  $\underline{s}$  и достаточно больших  $k$ , что

$$\mu_k^{(\lambda+1)}|f_{-e,k}|_{\underline{s}} < M_2 \max_{e \in E^{(\lambda)}} |s_{e,k}|^{1/2}. \quad (8.18)$$

Оценивая сверху начальные данные  $\mu_k^{(\lambda+1)}(f_{e,k} - I_e^*(f_{-e,k}))$  в задаче о скачках с помощью (8.17) и (8.18), мы, наконец, видим из предложения 5.3, что существует такая постоянная  $M_3$ , что

$$\mu_k^{(\lambda+1)}\|\omega^{(\lambda)}\|_{C_k} < M_3|\underline{s}_k|^{1/2}. \quad (8.19)$$

Поскольку на каждой компоненте  $C^v \subset C^{(\lambda+1)}$  дифференциалы  $\mu_k^{(\lambda+1)}\Psi_k^{(>\lambda)}$  имеют конечный ненулевой предел, то для любого компакта  $K \subset C_k^{(>\lambda)}$  имеем

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k^{(\lambda+1)}\Psi_k^k|_K &= \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k^{(\lambda+1)}(\Psi_k^{(>\lambda)} - \omega_k^{(\lambda)})|_K \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k^{(\lambda+1)}\Psi_k^{(>\lambda)}|_K = \Phi^{(\lambda+1)}|_K. \end{aligned}$$

Лемма 8.15 доказана.

Доказанная выше лемма завершает доказательство шага индукции. Действительно, она утверждает, что, если выполнено предположение индукции на шаге  $\lambda$ , то существует расширение шкалы масштабов, при котором выполняется предположение индукции на уровне  $\lambda + 1$ .

В частности, мы доказали следующее утверждение.

**СЛЕДСТВИЕ 8.19.** *У всякой последовательности  $X_k$ , джет-сходящейся на уровне  $\lambda$ , есть подпоследовательность, джет-сходящаяся на уровне  $\lambda + 1$ .*

Так как стратификация по порядку зануления всегда конечна, то для завершения доказательства теоремы остается лишь найти пределы нулей дифференциалов  $\Psi_k$ . Ясно, что пределы нулей  $\Psi_k$  вне нодальных точек  $C$  те же, что и у  $\mu_k^{(\lambda)}\Psi_k$ , и совпадают с нулями  $\mathbb{P}\Phi$ , взятыми с кратностями. Значит, нам надо показать, что нодальная точка  $q_{|e|}$  является пределом для  $\text{ord}_{q_e}\Phi^{v(e)} + \text{ord}_{q_{-e}}\Phi^{v(-e)} + 2$  нулей (с кратностями) дифференциала  $\Psi_k$ .

Пусть  $K_{e,k}$  – компакт  $(V_e \setminus U_{-e}^{s_{e,k}}) \sqcup (V_{-e} \setminus U_{-e}^{s_{e,k}})/(\gamma_e \sim \gamma_{-e})$ , где, как обычно, мы отождествили швы с помощью отображения  $I_e$ . Дифференциалы  $dz_e$  в  $V_{-e} \setminus U_{-e}^{s_{e,k}}$  и  $s_{e,k}z_{-e}^{-2}dz_{-e}$  в  $V_{-e} \setminus U_{-e}^{s_{e,k}}$  стыкуются на шве  $\gamma_e$  и, значит, задают голоморфный дифференциал  $\zeta_{e,k}$  на  $K_{e,k}$ , нигде не обращающийся в нуль. Следовательно, число нулей дифференциала  $\Psi_k$  на  $K_{e,k}$  равно числу нулей на  $K_{e,k}$  у функции  $\Psi_k/\zeta_{e,k}$ . По принципу аргумента это число равно интегралу от  $(2\pi i)^{-1}d\log(\Psi_k/\zeta_{e,k})$  по границе  $\partial K_{e,k}$ , представляющей собою объединение противоположно ориентированных окружностей  $|z_e| = 1$  и  $|z_{-e}| = 1$ . На этих окружностях проективизации  $\mathbb{P}\Psi_k$  сходятся к  $\mathbb{P}\Phi^{v(e)}$  и  $\mathbb{P}\Phi^{v(-e)}$  соответственно. Значит, интегралы от дифференциала  $d\log(\Psi_k/\zeta_{e,k})$  по окружностям сходятся



соответственно к интегралам от  $d \log(\Phi^{v(e)}/dz_e)$  и  $d \log(z_{-e}^2 \Phi^{v(-e)}/dz_{-e})$ . Таким образом, полное число нулей  $\Psi_k$  в  $K_{e,k}$  при достаточно больших  $k$  равно сумме полного числа нулей и полюсов  $\Phi^{v(e)}$  в  $V_e$  и полного числа нулей и полюсов  $z_{-e}^2 \Phi^{v(-e)}$  в  $V_{-e}$ , где мы всегда учитываем кратности. Поскольку в этих окрестностях  $\Phi$  может иметь нуль или полюс только в начале координат, отсюда следует утверждение о кратности нуля в  $q_{|e|}$ . Кратность точки  $p_\ell$  как предела нулей  $\Psi_k$  вычисляется непосредственно:  $p_\ell$  – гладкая точка содержащей ее компоненты  $C^v$ , так что ее кратность как предела нулей  $\Psi_k$  в точности равна разности порядков полюсов  $\Psi_k$  и  $\Phi$  в  $p_\ell$ . Наша основная теорема 8.12 доказана.

**СЛЕДСТВИЕ 8.20.** *Если для последовательности гладких джет-кривых  $\{X_k\}$ , сходящейся к стабильной джет-кривой  $X$ , существует предел нулей ВН-дифференциалов  $\Psi_k$ , то этот предел задается дивизором нулей подкрученного предельного дифференциала некоторой джет-сходящейся последовательности.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** В силу доказанной выше теоремы 8.12 любая последовательность содержит джет-сходящуюся. Более того, по доказанному предел нулей ВН-дифференциалов, соответствующих этой джет-сходящейся подпоследовательности, является дивизором нулей подкрученного предельного дифференциала для этой подпоследовательности. Так как по исходной последовательности существует предел нулей, он должен быть равен пределу нулей по рассматриваемой подпоследовательности. Следствие доказано.

### 9. Дополнение: $m$ -сбалансированное приближение

Из доказательства основной теоремы 8.12 о пределах нулей ВН-дифференциалов видно, что мотивировкой введения условия сбалансированности (8.1) джета дифференциала в точке  $q_e$  и сингулярной части в  $q_{-e}$  является желание обеспечить достаточную малость скачка, которая в силу предложения 5.3 позволяет улучшить оценку корректирующего почти ВН-решения. Вытекающая из предложения 5.3 оценка показывает, что (для достаточно малых  $\underline{s}$ ) это решение мажорируется самими дифференциалами. В этом разделе мы разовьем эту идею и введем общее понятие  $m$ -сбалансированных приближений. Используемая в основном тексте конструкция приближений отвечает случаю  $m = 0$ .  $m$ -сбалансированные приближения с  $m > 0$  не нужны для доказательства основных результатов работы, однако, по мнению авторов, они важны для будущих исследований высших асимптотик мероморфных дифференциалов при вырождении кривой.

Зададимся числом  $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  и будем использовать обозначения из предыдущего раздела. Пусть  $W$  обозначает множество наборов мероморфных ВН-дифференциалов  $\Phi = \{\Phi^v\}$  на  $C^v$  с полюсами порядка не выше  $m_\ell + 1$  в отмеченных точках  $p_\ell$ , голоморфных вне отмеченных точек и прообразов нодальных точек и имеющих полюсы порядка не выше  $m + 1$  в прообразах нодальных точек,

причем для каждой нодальной точки  $e$  вычеты в точках  $q_e$  и  $q_{-e}$  противоположны. Заметим, что  $W$  – конечномерное векторное пространство. Ниже нам понадобится векторное подпространство  $W_0 \subset W$  дифференциалов, регулярных в точках  $p_\ell$  и с нулевыми вычетами в нодальных точках (где они могут иметь полюсы порядка выше первого). Для  $\Phi \in W$  обозначим  $u_{j,e}$  коэффициенты ряда Лорана дифференциала  $\Phi^{v(e)}$  в  $q_e$ , обозначим  $\sigma_e$  его сингулярную часть, и пусть  $J_e$  обозначает  $m$ -джет голоморфной части  $\Phi^{v(e)}$  и полярный член порядка  $-1$ .

Для джет-кривой  $X = X_{w,u,s}$  мы, как и выше, обозначаем  $\underline{c} = \underline{c}(X)$  сумму ряда из предложения 6.7, т.е. набор чисел, для которого  $\Psi_X = \Psi_X(\underline{c}(X))$ . Теперь  $m$ -сбалансированное приближение определяется следующим образом.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.1.** Для заданной кривой  $X$  и фиксированного целого  $m \geq 0$  элемент

$$\Phi_X[m] = \{\Phi[m]^v\} \in W$$

называется  *$m$ -сбалансированным приближением*, если выполнены следующие условия.

(а) В каждой точке  $p_\ell$  сингулярная часть  $\Phi[m]$  определяется координатами  $w$ .

(б) В каждом прообразе  $q_e$  любой нодальной точки вычет  $\Phi[m]^{v(e)}$  равен  $\text{Res}_{q_e} \Phi[m]^{v(e)} = ic_e$ .

(с) В каждом прообразе  $q_{-e}$  любой нодальной точки сингулярная часть  $\sigma_{-e}$  дифференциала  $\Phi[m]^{v(-e)}$  равна поднятию  $m$ -джета  $J_e$  дифференциала  $\Phi[m]^{v(e)}$  в  $q_e$  отображением  $I_e^*$ :

$$\sigma_{-e} = I_e^*(J_e(\Phi[m]^{v(e)})),$$

что совпадает с условием сбалансированности в форме равенства (8.1).

Заметим, что условие (с) задает как сингулярную часть  $\sigma_{-e}$  в терминах джета дифференциала  $\Phi[m]^{v(e)}$ , так и (в случае выбора прообраза  $q_{-e}$ ) сингулярную часть  $\sigma_e$  в терминах джета дифференциала  $\Phi[m]^{v(-e)}$ . Поэтому мы не можем доказать существование  $m$ -сбалансированных приближений, задав их одной компоненте, а затем явно определить на другой. Для доказательства существования  $m$ -сбалансированного приближения мы сначала докажем, что оно единственно (если существует). Это доказательство единственности является по существу доказательством невырожденности системы неоднородных линейных уравнений, эквивалентных условиям, определяющим  $m$ -сбалансированное приближение, а значит, влечет и существование такого приближения. Для приложений важно явно вычислить  $m$ -сбалансированное приближение, поэтому вместо абстрактного утверждения о существовании  $m$ -сбалансированного приближения мы приведем ниже его явную конструкцию в виде суммы рекуррентно заданного ряда.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.2.** Для произвольного  $t$  найдется такая константа  $t_m$ , что при  $|w|, |u|, |s| < t_m$  существует единственное  $m$ -сбалансированное приближение  $\Phi_X[m]$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналогично конструкции ВН-дифференциала в координатах вклейки, мы продемонстрируем существование построением приближения в виде ряда  $\Phi_X[m] = \sum_{l=0}^{\infty} \Phi^{(l)}$ , начальный член которого теперь равен  $\Phi^{(0)} := \Phi(\underline{c}(X))$ .

Прочие члены  $\Phi^{(l)}$  с  $l > 1$  будут лежать в подпространстве  $W_0$ , и их прибавление к  $\Phi^{(0)}$  не изменит ни сингулярных частей  $\Phi$  в точках  $p_\ell$ , ни вычетов в нодальных точках. Чтобы определить  $\Phi^{(l)}$ , введем линейный оператор  $R: W \rightarrow W_0$ , который должен “сбалансировать” сингулярные части. Элемент  $W_0$  задается своими сингулярными частями в точках  $q_e$ , и мы зададим  $R(\Phi)$ , предписывая ему иметь сингулярные части следующего вида в точках  $q_{-e}$ :

$$s_e \sum_{j=0}^{m-1} s_e^j u_{j,e} z_{-e}^{-j-2} dz_{-e}, \tag{9.1}$$

где  $u_{j,e}$  – коэффициенты джета  $J_e$  дифференциала  $\Phi$  (заметим, что у сингулярной части в этой формуле нулевой вычет, как это и должно быть у элемента пространства  $W_0$ ).

Определим норму на  $W$  как максимальную из норм сингулярных частей. Пусть  $R': W \rightarrow W_0$  – линейный оператор, определенный в терминах сингулярных частей соотношением

$$R'(\sigma)_{-e} = s_e^{-1} R(\sigma)_{-e}.$$

Поскольку он гладко зависит от  $u$  и набор сингулярных частей  $R(\sigma)$  получается умножением сингулярных частей  $R'(\sigma)_{-e}$  на диагональную матрицу, составленную из  $s_e$ , найдется такая постоянная  $M_m$ , что при  $\Phi \in W$  имеет место неравенство

$$|R(\Phi)| < |\underline{s}| |R'(\Phi)| \leq M_m |\underline{s}| |\Phi|. \tag{9.2}$$

Теперь определим члены ряда равенствами  $\Phi^{(l+1)} := R(\Phi^{(l)})$  при  $l \geq 0$ ; тогда из неравенства (9.2) мы видим, что

$$|\Phi^{(l+1)}| \leq M_m |\underline{s}| |\Phi^{(l)}| \tag{9.3}$$

для всех  $l$ . Итак, если  $|\underline{s}| < M_m^{-1}$ , то нормы членов ряда ограничены геометрической прогрессией со знаменателем, меньшим 1, так что ряд сходится.

Для доказательства единственности приближения рассмотрим разность  $\Phi'$  двух  $m$ -сбалансированных приближений. Тогда  $\Phi' \in W_0$  представляет собой набор ВН-дифференциалов, которые голоморфны в отмеченных точках и удовлетворяют условиям сбалансированности (9.1). Однако тогда  $R(\Phi') = \Phi'$  по определению, так что  $|\Phi'| \leq M_m |\underline{s}| |\Phi'|$ , что приводит к противоречию при  $|\underline{s}| < M_m^{-1}$ , если разность  $\Phi'$  ненулевая. Предложение доказано.

Аналогично доказательству леммы 8.14 можно показать, что при  $m > 2m_0$  для любой неприводимой компоненты  $C^v$  мероморфный дифференциал  $\Phi[m]^v$ , составляющий  $m$ -сбалансированное приближение, не равен нулю тождественно. Доказательство проводится индукцией по числу компонент кривой  $C$  и использует оценки, аналогичные оценкам из леммы 8.14, которые показывают, что  $m$ -джет  $J_e(\Phi)$  отличен от тождественного нуля. Из этого следует, что сингулярные части  $\sigma_{-e}$  не являются нулевыми, а значит, никакой ВН-дифференциал  $\Phi[m]^v$  не равен нулю тождественно.

Далее рассмотрим задачу о скачках с начальными данными

$$\Phi[m]^{v(e)} \Big|_{\gamma_e} - I_e^*(\Phi[m]^{v(-e)} \Big|_{\gamma_{-e}}).$$

Пусть  $\omega_X[m]$  – почти ВН-решение этой задачи о скачках, так что  $\Phi_X[m] - \omega_X[m]$  склеивается в дифференциал на  $C$ . Легко видеть, что он равен  $\Psi_X$ . Условие сбалансированности теперь показывает, что в начальных данных задачи о скачках первые  $m$  членов сокращаются (как в равенствах (8.15) и (8.16) из доказательства теоремы 8.12), откуда получается оценка почти ВН-решения. В результате приходим к следующему утверждению.

**ЛЕММА 9.3.** *Для любых достаточно малых  $w, u, \underline{s}$  существует такая постоянная  $M$ , что для всякого компакта  $K \subset C^v \setminus \bigcup_{e \in E_v} \{q_e\}$  выполнено неравенство*

$$\|\Psi_X - \Phi_X[m]\|_K < M|\underline{s}|^{(m+1)/2}. \quad (9.4)$$

Эта лемма говорит, что на компонентах  $C^v$ , где предельный ВН-дифференциал  $\Psi$  отличен от тождественного нуля (т.е. на  $C^{(0)}$ ),  $\Phi_X[m]$  приближает  $\Psi_X$  с порядком  $|\underline{s}|^{(m+1)/2}$ . Как и раньше, мы также можем аппроксимировать  $\Psi_X|_{C^{(>0)}}$  с той же точностью, используя стратификацию по порядку зануления.

Точнее, пусть  $X_k - \text{джет}(\mu^{(0)}, \dots, \mu^{(L)})$ -многомасштабно сходящаяся последовательность (см. определение 8.8). Определим новую последовательность дифференциалов следующим образом.

**ОБОЗНАЧЕНИЯ 9.4.** При  $0 \leq \lambda \leq L$  символами  $\Psi_k[m]^{(\leq \lambda)}$  и  $\Psi_k[m]^{(> \lambda)}$  обозначим ВН-дифференциалы соответственно на  $C_k^{(\leq \lambda)}$  и  $C_k^{(> \lambda)}$  со следующими сингулярными частями:

- $\sigma_{\ell,k}$  в точках  $p_\ell \in C^{(\leq \lambda)}$  у дифференциала  $\Psi_k[m]^{(\leq \lambda)}$ ,
- в точках  $q_e, e \in E^{(\lambda)}$ , у дифференциала  $\Psi_k[m]^{(\leq \lambda)}$  сингулярная часть  $\sigma_{e,k}[m]$  имеет порядок не выше  $m+1$  и вычет  $ic_{e,k}$ ,
- в точках  $q_{-e}, e \in E^{(\lambda)}$ , у  $\Psi_k^{(> \lambda)}$  сингулярная часть  $\sigma_{-e,k}[2m]$  имеет порядок не выше  $2m+1$ ,

для которых выполнены следующие усиленные условия сбалансированности:

$$\sigma_{e,k}[m] + J_e^{[2m]}(\Psi_k[m]^{(\leq \lambda)}) = I_e^*(\sigma_{-e,k}[2m] + J_{-e}^{[m]}(\Psi_k[m]^{(> \lambda)})), \quad (9.5)$$

где  $J_e^{[m]}(\cdot)$  – сумма полярного члена порядка  $-1$  и  $m$ -джета регулярной части соответствующего дифференциала.

В усиленном условии сбалансированности требуется, чтобы сингулярная часть  $\sigma_{e,k}[m]$  была  $m$ -уравновешена  $m$ -джетом дифференциала  $\Psi_k[m]^{(>\lambda)}$  в точке  $q_{-e}$ , а сингулярная часть  $\sigma_{-e,k}[2m]$  была  $2m$ -уравновешена  $2m$ -джетом дифференциала  $\Psi_k[m]^{(>\lambda)}$  в  $q_e$ . С этой точки зрения в первоначальном условии сбалансированности (8.1) требуется 0-сбалансированность в одну сторону и  $m$ -сбалансированность в другую.

То, что такая пара дифференциалов  $\Psi_k[m]^{(\leq\lambda)}$  и  $\Psi_k[m]^{(>\lambda)}$  существует, надо доказывать, поскольку, в отличие от непосредственно определенного  $\Psi_k^{(\leq\lambda)}$  и от дифференциала  $\Psi_k^{(>\lambda)}$ , заданного своими сингулярными частями, дифференциалы  $\Psi_k[m]^{(\leq\lambda)}$  и  $\Psi_k[m]^{(>\lambda)}$  должны удовлетворять усиленному условию сбалансированности, которое вводит ограничения на особенности обоих дифференциалов. Однако их существование можно доказать такими же рассуждениями, как в доказательстве существования  $m$ -сбалансированных приближений. По существу это доказательство опять сводится к тому, чтобы заметить, что перед сингулярными частями  $\sigma_{e,k}[m]$  и  $\sigma_{-e,k}[2m]$  возникают в качестве коэффициентов некоторые дополнительные степени величин  $s_{e,k}$ , что дает единственность решений. Далее, поскольку усиленное условие сбалансированности представляет собой неоднородную систему  $\mathbb{R}$ -линейных уравнений, эта система оказывается невырожденной и потому разрешима. Аналогично доказательству предложения 9.2, эти дифференциалы можно построить явно в виде сумм рекуррентно заданных рядов – по существу для этого надо обратить линейный оператор, что и даст нам рекуррентно заданный ряд, члены которого убывают как степени  $s$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.5.** Для заданной джет-сходящейся последовательности  $X_k$  пусть  $\Phi_k[m]^{(\lambda+1)}$  –  $m$ -сбалансированное приближение дифференциала  $\Psi_k[m]^{(>\lambda)}$  на  $C_k^{(>\lambda)}$ . Тогда набор дифференциалов  $\Phi_k[m]^{(\lambda+1)}$  на  $C^{(\lambda+1)}$  назовем  *$m$ -сбалансированным приближением* на  $X_k$ .

Усиленное условие сбалансированности используется здесь, чтобы обеспечить лучшую оценку начальных данных в нужной нам задаче о скачках. Термин “ $m$ -сбалансированное приближение” объясняется следующим центральным результатом, полученным для таких приближений.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.6.** Для каждой джет-сходящейся последовательности  $X_k$ , для любого  $\lambda \geq 0$  и любой компоненты  $C^v \subset C^{(\lambda+1)}$  выполнено неравенство

$$\mu_k^{(\lambda+1)} \|\Psi_k - \Phi_k[m]^{(\lambda+1)}\|_{C^v} < M_1 |s_k|^{(m+1)/2}.$$

Соответствующее доказательство вполне аналогично доказательству теоремы 8.12. Для доказательства нашего основного результата, теоремы 8.12, предложение 9.6 нам не требуется, так что мы не приводим деталей доказательства, а лишь намечаем его на случай будущих приложений.

**ИДЕЯ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА.** Воспроизводя доказательство теоремы 8.12, сначала надо доказать утверждение, аналогичное лемме 8.13, которое показывает, что  $\mu$ -многомасштабные пределы  $\Psi_k$  и  $\Psi_k[m]^{(\leq\lambda)}$  совпадают. Здесь использует-

ся почти ВН-решение задачи о скачках и учитывается, что в силу присутствия положительных степеней  $s_{e,k}$  во всех сингулярных частях  $\sigma_{e,k}$  дифференциала  $\Psi_k[m]^{(\leq \lambda)}$  в точках  $q_e$ , где  $e \in E^{(\lambda)}$  (что вытекает из усиленного условия сбалансированности), эти сингулярные части стремятся к нулю при  $k \rightarrow \infty$ . После этого, аналогично центральной части доказательства теоремы 8.12 можно показать, что ВН-дифференциал  $\Psi_k$  равен

$$\Psi_k = (\Psi_k[m]^{(\leq \lambda)} \sqcup \Psi_k[m]^{(> \lambda)}) - \omega_k[m]^{(\lambda)},$$

где  $\omega[m]^{(\lambda)}$  – почти ВН-решение задачи о скачках с нулевыми скачками на швах, соответствующих внутренним нодальным точкам  $e \in I_{C^{(\leq \lambda)}}$  и  $e \in I_{C^{(> \lambda)}}$ , и со скачками на швах  $\gamma_e$  при  $e \in E^{(\lambda)}$ , заданных выражением

$$\Psi_k[m]^{(\leq \lambda)}|_{\gamma_e} - I_e^*(\Psi[m]_k^{(> \lambda)}|_{\gamma_{-e}}). \quad (9.6)$$

В точности так же, как в доказательстве оценки (8.19), теперь проверяется, что, в силу усиленного условия сбалансированности (9.5), в оценках начальных данных для этой задачи о скачках действительно возникает дополнительная  $m$ -я степень величины  $s_{e,k}$ , так что оценки сверху (8.17) и (8.18) усиливаются за счет добавочного множителя  $|s_{e,k}|^m$ . Теперь очередное применение оценки для почти ВН-решения задачи о скачках, полученной в предложении 5.3, обеспечивает существование постоянной  $M$ , с которой на каждой компоненте  $C^v \subset C^{(\lambda+1)}$  выполнено неравенство

$$\mu_k^{(\lambda+1)} \|\omega[m]^{(\lambda)}\|_{C^v} < M |\underline{s}_k|^{(m+1)/2}.$$

Отсюда вытекает утверждение предложения.

Разумеется, переходя к пределу при  $k \rightarrow \infty$ , из предложения 9.6 мы получим, что по всякой джет-сходящейся последовательности  $\mu^{(\lambda)}$ -масштабный предел дифференциалов  $\Phi_k[m]^{(\lambda)}$  на  $C^{(\lambda)}$  равен подкрученному дифференциалу  $\Phi^{(\lambda)}$  из теоремы 8.12. Более того, оценка из предложения 9.6 показывает, что при  $0 \leq \lambda \leq L$  набор дифференциалов  $\Phi_k[m]^{(\lambda)}$  является приближением для  $\Psi_k$ , которое даже после масштабирования с соответствующим коэффициентом  $\mu^{(\lambda)}$  все еще имеет порядок  $|s|^m$ . Зная это, мы можем с любой точностью исследовать дифференциалы  $\Psi_k$  при вырождении последовательности джет-кривых. В более общем контексте метод введения  $m$ -сбалансированных приближений можно использовать при изучении вырождений дифференциалов других типов на вырождающихся последовательностях римановых поверхностей.

### Список литературы

- [1] E. Arbarello, M. Cornalba, P. A. Griffiths, *Geometry of algebraic curves*, v. II, With a contribution by J. D. Harris, Grundlehren Math. Wiss., **268**, Springer, Heidelberg, 2011, xxx+963 pp.
- [2] M. Bainbridge, D. Chen, Q. Gendron, S. Grushevsky, M. Moeller, “Compactification of strata of Abelian differentials”, *Duke Math. J.*, **167**:12 (2018), 2347–2416.

- [3] L. Bers, “Spaces of degenerating Riemann surfaces”, *Discontinuous groups and Riemann surfaces* (Univ. Maryland, College Park, MD, 1973), *Ann. of Math. Stud.*, **79**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1974, 43–55.
- [4] D. Chen, “Degenerations of abelian differentials”, *J. Differential Geom.*, **107**:3 (2017), 395–453.
- [5] G. Farkas, R. Pandharipande, “The moduli space of twisted canonical differentials”, *J. Inst. Math. Jussieu*, **17**:3 (2018), 615–672.
- [6] Q. Gendron, “The Deligne–Mumford and the incidence variety compactifications of the strata of  $\Omega\mathcal{M}_g$ ”, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **68**:3 (2018), 1169–1240.
- [7] W. D. Gillam, *Oriented real blowup*, preprint, 21 pp., <http://www.math.boun.edu.tr/instructors/wdgillam/manuscripts.html>.
- [8] S. Grushevsky, I. Krichever, “The universal Whitham hierarchy and the geometry of the moduli space of pointed Riemann surfaces”, *Surveys in differential geometry*, v. XIV: *Geometry of Riemann surfaces and their moduli spaces*, *Surv. Differ. Geom.*, **14**, Int. Press, Somerville, MA, 2009, 111–129.
- [9] S. Grushevsky, I. Krichever, “Real-normalized differentials and the elliptic Calogero–Moser system”, *Complex geometry and dynamics. The Abel symposium 2013*, *Abel Symp.*, **10**, Springer, Cham, 2015, 123–137.
- [10] S. Grushevsky, I. Krichever, *Real-normalized differentials and cusps of plane curves*, in preparation.
- [11] X. Hu, C. Norton, “General variational formulas for Abelian differentials”, *Int. Math. Res. Notices*, 2018, rny106, Publ. online; 2018 (v1 – 2017), 40 pp., arXiv: 1705.05366.
- [12] И. М. Кричевер, “Спектральная теория ‘конечнозонных’ нестационарных операторов Шрёдингера. Нестационарная модель Пайерлса”, *Функц. анализ и его прил.*, **20**:3 (1986), 42–54; англ. пер.: I. M. Krichever, “Spectral theory of finite-zone nonstationary Schrödinger operators. A nonstationary Peierls model”, *Funct. Anal. Appl.*, **20**:3 (1986), 203–214.
- [13] И. М. Кричевер, “Метод усреднения для двумерных ‘интегрируемых’ уравнений”, *Функц. анализ и его прил.*, **22**:3 (1988), 37–52; англ. пер.: I. M. Krichever, “Method of averaging for two-dimensional ‘integrable’ equations”, *Funct. Anal. Appl.*, **22**:3 (1988), 200–213.
- [14] И. М. Кричевер, “Вещественно-нормированные дифференциалы и гипотеза Арбарелло”, *Функц. анализ и его прил.*, **46**:2 (2012), 37–51; англ. пер.: I. M. Krichever, “Real normalized differentials and Arbarello’s conjecture”, *Funct. Anal. Appl.*, **46**:2 (2012), 110–120.
- [15] И. М. Кричевер, С. П. Новиков, “Алгебры типа Вирасоро, римановы поверхности и струны в пространстве Минковского”, *Функц. анализ и его прил.*, **21**:4 (1987), 47–61; англ. пер.: I. M. Krichever, S. P. Novikov, “Virasoro-type algebras, Riemann surfaces and strings in Minkowski space”, *Funct. Anal. Appl.*, **21**:4 (1987), 294–307.
- [16] L. Lang, *Harmonic tropical curves*, 2015, 46 pp., arXiv: 1501.07121.
- [17] C. R. Norton, *Limits of real-normalized differentials on stable curves*, Ph.D. Thesis, Stony Brook Univ., 2014, 115 pp.
- [18] B. Osserman, “Limit linear series for curves not of compact type”, *J. Reine Angew. Math.*, 2017, Publ. online; 2014, 34 pp., arXiv: 1406.6699.
- [19] Yu. L. Rodin, *The Riemann boundary problem on Riemann surfaces*, *Math. Appl. (Soviet Ser.)*, **16**, D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1988, xiv+199 pp.
- [20] М. Шиффер, Д. К. Спенсер, *Функционалы на конечных римановых поверхностях*, ИЛ, М., 1957, 347 с.; пер. с англ.: M. Schiffer, D. C. Spencer, *Functionals of finite Riemann surfaces*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1954, x+451 pp.

- [21] S. A. Wolpert, “Infinitesimal deformations of nodal stable curves”, *Adv. Math.*, **244** (2013), 413–440.
- [22] Э. И. Зверович, “Краевые задачи теории аналитических функций в гёльдеровских классах на римановых поверхностях”, *УМН*, **26**:1(157) (1971), 113–179; англ. пер.: È. I. Zverovich, “Boundary value problems in the theory of analytic functions in Hölder classes on Riemann surfaces”, *Russian Math. Surveys*, **26**:1 (1971), 117–192.

**Самуил Грушевский**  
(**Samuel Grushevsky**)

Stony Brook University, Stony Brook, NY, USA

*E-mail*: [sam@math.stonybrook.edu](mailto:sam@math.stonybrook.edu)

Поступила в редакцию  
12.12.2018

**Игорь Моисеевич Кричевер**  
(**Igor M. Krichever**)

Columbia University, New York, USA;

Сколковский институт науки и технологий;

Национальный исследовательский университет  
“Высшая школа экономики”;

Институт проблем передачи информации

им. А. А. Харкевича Российской академии наук;

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау

Российской академии наук

*E-mail*: [krichev@math.columbia.edu](mailto:krichev@math.columbia.edu)

**Хая Нортон**  
(**Chaya Norton**)

Concordia University, Montreal, QC, Canada;

Centre de Recherches Mathématiques (CRM),

Université de Montréal, Montreal, QC, Canada

*E-mail*: [nortonch@crm.umontreal.ca](mailto:nortonch@crm.umontreal.ca)